

विध्न विचारत भीरु जन, नहीं आरम्भे काम,
 विपति देख छोड़े तुरंत मध्यम मन कर श्याम।
 पुरुष सिंह संकल्प कर, सहते विपति अनेक,
 'बना' न छोड़े ध्येय को, रघुबर राखे टेक।।

रचित: मानव धर्म प्रणेता

सद्गुरु श्री रणछोड़दासजी महाराज

फलन (Functions)

The calculus is the greatest aid We have to the appreciation
 of physical truth in broadest sense of the word.Williams J. Osgood

परिभाषा (Definition) :

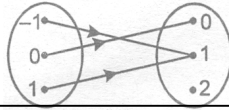
फलन किसी अरिक्त समुच्चय A से अरिक्त समुच्चय B में एक विशेष प्रकार का नियम (या संगतता) है जिसके अंतर्गत A के प्रत्येक अवयव का, B के अद्वितीय अवयव से सम्बद्ध होता है। प्रतीकात्मक रूप में $f : A \rightarrow B$ लिखते हैं— इसे हम "f, समुच्चय A से समुच्चय B में एक फलन है।" पढ़ते हैं।

उदाहरणतः मानाकि $A \equiv \{-1,0,1\}$ एवं $B \equiv \{0,1,2\}$ अब $A \times B \equiv \{(-1,0),(-1,1),(-1,2),(0,0),(0,1),(0,2), (1,0),(1,1),(1,2)\}$

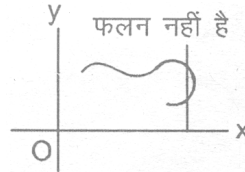
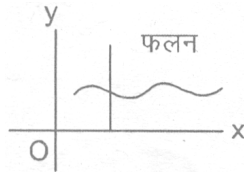
अब " $f : A \rightarrow B, f(x) = x^2$ " द्वारा परिभाषित एक फलन है तो

$F \equiv \{-1,1\}(0,0),(1,1)$

फलन f को आरेखीय रूप में निम्न चित्र द्वारा भी दर्शाया जा सकता है।



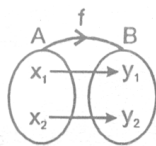
नोट: प्रत्येक फलन $y = f(x) : A \rightarrow B$ जहाँ x स्वतंत्र चर है। जिसका मान समुच्चय A का कोई अवयव जबकि y का मान समुच्चय B का कोई अवयव है। यह सम्बद्ध फलन होगा यदि और केवल यदि (i) x समुच्चय A का प्रत्येक मान ले सकता हो (ii) x के एक मान के लिए समुच्चय B में y का केवल एक मान हो।



Graphically : यदि कोई अर्द्धादर रेखा आलेख को एक से अधिक बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती हो तो यह आलेख फलन को प्रदर्शित नहीं करता है—

फलन का प्रान्त, सहप्रान्त एवं परिसर (Domain, Co-domain & Range of a Function):

यदि $f : A \rightarrow B$ द्वारा परिभाषित कोई एक फलन हो तो समुच्चय A फलन f का प्रान्त तथा समुच्चय B फलन f का सहप्रान्त कहलाता है।



यदि x_1 का प्रतिचित्रण y_1 हो तो y_1 को f के अंतर्गत रुरु का प्रतिबिम्ब एवं x_1 को y_1 पूर्व प्रतिबिम्ब कहते हैं। यदि केवल f(x) दिया गया हो (प्रान्त एवं सहप्रान्त नहीं दर्शाए गए हो।) तो प्रान्त 'x' के उन मानों का समुच्चय है जिनके लिये फलन f(x) वास्तविक है जबकि सहप्रान्त $(-\infty, \infty)$ लिया जाता है। (ITFs के अलावा) परिसर y के मानों का पूर्ण समुच्चय होता है स्पष्टता परिसर सहप्रान्त का उपसमुच्चय होता है। ऐसा फलन जिसके प्रान्त व परिसर दोनों वास्तविक संख्याओं के उपसमुच्चय हो, तो वह वास्तविक फलन कहलाता है।

फलनों पर बीजीय संक्रियाएँ (Algebraic Operations on Functions):

यदि x के वास्तविक मान फलन f और g के प्रान्त समुच्चय क्रमशः A एवं B है, तो दोनों f और g , $A \cap B$ में परिभाषित है। अब हम $f + g, f - g, (f \cdot g)$ एवं (f/g) को इस प्रकार परिभाषित करते हैं—

- (i) $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
 (ii) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
 (iii) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ का प्रान्त $\{x | x \in A \cap B \text{ ताकि } g(x) \neq 0\}$ है।
- प्रत्येक स्थिति में प्रान्त $A \cap B$ है।

नोट: $\phi(x) = \{f(x)\}^{g(x)}$ के प्रान्त के लिए सामान्यतः प्रतिबन्ध $f(x) > 0$ एवं $g(x)$ वास्तविक होना चाहिए।

$\phi(x) = f(x) C_{g(x)}$ या $\phi(x) = f(x) P_{g(x)}$ के प्रान्त के लिए प्रान्त की शर्तें $f(x) \geq g(x)$ तथा $f(x) \in N$ व $g(x) \in W$ है।

परिसर ज्ञात करने की विधियाँ (Methods of determining range):

- (i) x को y के पदों में प्रदर्शित करके
 यदि $y=f(x) \Leftrightarrow x=g(y)$ हो, तो $g(y)$ का प्रान्त y के संगत मानों (अर्थात् $f(x)$ प्रान्त) को प्रदर्शित करता है।

(ii) ग्राफीय विधि :

फलन के ग्राफ के y - निर्देशांकों का समुच्चय फलन का परिसर होता है।

- (iii) एक दिष्टता द्वारा बहुत सारे फलन एकदिष्ट वर्द्धमान या एक दिष्ट ह्रासमान होते हैं एकदिष्ट फलनों की स्थिति में निम्नतम एवं उच्चतम मान अंतराल के अंतिम बिन्दुओं पर होते हैं। कुछ सामान्य फलन जो अंतराल जहाँ व सतत् है, में वर्द्धमान या ह्रासमान हो निचे दिये गये हैं।

$[a, b]$ एकदिष्ट वर्द्धमान फलन के लिए

(i) $f'(x) \leq 0$

(ii) परिसर $[f(a), f(b)]$

$[a, b]$ एकदिष्ट ह्रासमान फलन के लिये

(i) $f'(x) \leq 0$

(ii) परिसर $[f(b), f(a)]$

फलनों के विभिन्न प्रकार (various Types of Functions): (i) बहुपद फलन (Polynomial Function):

यदि फलन $f, f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ द्वारा परिभाषित है जहाँ n अऋणात्मक पूर्णांक तथा $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ वास्तविक संख्याएँ एवं $a_0 \neq 0$ हो तब फलन f, n घात का बहुपद फलन कहलाता है।

नोट : केवल दो बहुपद फलन इस प्रकार है कि सम्बन्ध $f(x) \cdot f(1/x) = f(x) + f(1/x)$, को सन्तुष्ट करते हैं वे $f(x) = 1 \pm x^n$

है। Proof : माना $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ हो, तब $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \dots + a_n$

यह सम्बन्ध x के बहुतसारे मानों के लिये सही है।

$\therefore x^n$ के गुणांकों की तुलना करने पर $a_0a_n = a_0 \Rightarrow a_n = 1$

इसी प्रकार x^{n-1} के गुणांकों की तुलना करने पर $a_0a_{n-1} + a_1a_n = 1 \Rightarrow a_{n-1} = 0$ इसी प्रकार a_{n-2}, \dots, a_1 सभी शून्य है।

(ii) बीजीय फलन (Algebraic Function):

y, x का बीजीय फलन है यदि यह फलन इस प्रकार है कि बीजीय समीकरण

$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \dots + P_{n-1}(y) + P_n(x) = 0$ को सन्तुष्ट करता है जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है तथा $P_0(x), P_1(x), \dots, x$ में बहुपद है। e.g. $y = |x|$ एक बीजीय फलन है, चूँकि यह समीकरण $y^2 - x^2 = 0$ को संतुष्ट करता है।

नोट: सभी बहुपद, फलन बीजीय फलन है लेकिन विलोम सत्य नहीं है।

फलन जो बीजीय नहीं है अबीजीय फलन कहलाता है।

(iii) परिमेय (Rational Function):

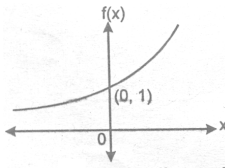
$y = f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ रूप का फलन परिमेय फलन होता है, जहाँ $g(x)$ एवं $h(x)$ बहुपद फलन है तथा $h(x) \neq 0$ है।

(iv) चरघातांकीय फलन (Exponential Function):

फलन $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$ ($a > 0, a \neq 1, x \in R$) चरघातांकीय फलन कहलाता है, चरघातांकीय फलनों के आलेख निम्न प्रकार हो सकते हैं—

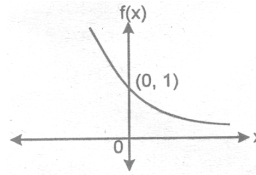
स्थिति II

$a > 1$ के लिए



स्थिति II

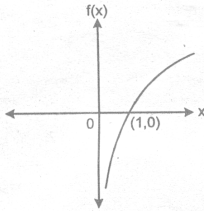
$0 < a < 1$ के लिए



- (v) लघुगणनीय फलन (Logarithmic Function): $f(x) = \log_a x$ लघुगणकीय फलन कहलाता है जहाँ $a > 0$ एवं $a \neq 1$ तथा $x > 0$ है। इनके आलेख निम्न प्रकार हो सकते हैं—

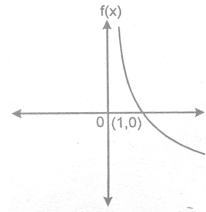
स्थिति I

$a > 1$ के लिए



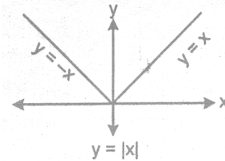
स्थिति II

$0 < a < 1$ के लिए



- (vi) निरपेक्ष मान फलन/मापांक फलन (Absolute Value Function/Modulus Function):

मापांक फलन का प्रतीक $f(x) = |x|$ है तथा इसे $y = |x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित करते हैं।

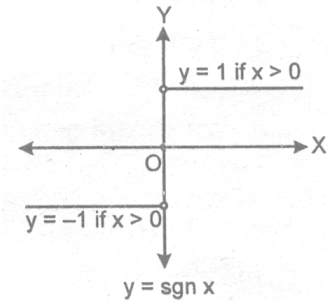


- (vii) सिग्नेम फलन (Signum Function): (इसे sign(x) भी कहा जाता है।)

फलन $f(x) = \text{sgn}(x)$ निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है—

$$f(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \text{ के लिए} \\ 0 & x = 0 \text{ के लिए} \\ -1 & x < 0 \text{ के लिए} \end{cases}$$

यह इस प्रकार भी लिखा जा सकता है — $\text{sgn } x = \begin{cases} \frac{|x|}{x}; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$

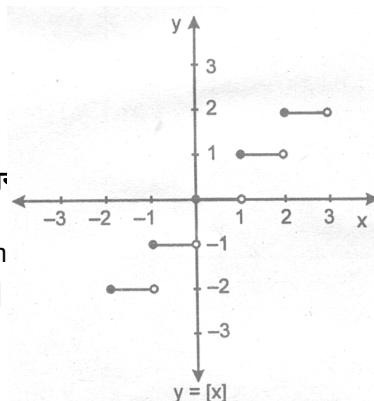


नोट : $\text{sgn} f(x) = \begin{cases} \frac{|f(x)|}{f(x)}; & f(x) \neq 0 \\ 0; & f(x) = 0 \end{cases}$

- (viii) महत्तम पूर्णांक फलन या सीढ़ी फलन (Greatest Integer Function or Step Function):

फलन $y = f(x) = [x]$ महत्तम पूर्णांक फलन कहलाता है, जहाँ $[x]$, महत्तम पूर्णांक x से छोटा या बराबर होता है।

$-1 \leq x < 0$ के लिए; $[x] = -1$; $0 \leq x < 1$ के लिए; $[x] = 0$
 $1 \leq x < 2$ के लिए; $[x] = 1$; $2 \leq x < 3$ के लिए; $[x] = 2$ आगे भी।



महत्तम पूर्णांक फलन

est interger function):

(A) $x - 1 < [x] \leq x$

(B) $[x \neq m] = [x] \neq m$

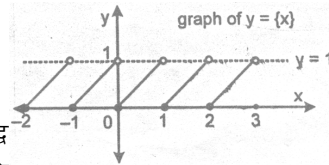
(C) $[x] + [y] \leq [x + y]$

(D) $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; \text{यदि } x \text{ पूर्णांक हो} \\ -1 & ; \text{अन्य स्थिति में} \end{cases}$

(ix) **भिन्नात्मक भाग फलन (Fractional Part Function):**

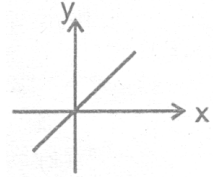
यह $y = \{x\} = x - [x]$ द्वारा परिभाषित है।

e.g. संख्या 2.1 का भिन्नात्मक भाग $2.1 - 2 = 0.1$ तथा -3.7 का भिन्नात्मक भाग 0.3 है। इस फलन का अवर्तकाल 1 है तथा इसका आलेख निम्न प्रकार दर्शाया जा सकता है।



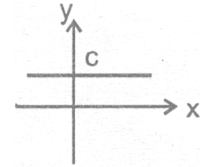
(x) **तत्समक फलन (Identity function):**

फलन $f: A \rightarrow A, f(x) = x \forall x \in A$, द्वि-मूलक फलन कहलाता है तथा इसे I_A से प्रदर्शित किया जाता है। यह ज्ञात करना आसान है कि तत्समक फलन एकैकी आच्छादक होता है।



(xi) **अचर फलन (Constant function):**

फलन $f: A \rightarrow B$ एक अचर फलन है यदि A के प्रत्येक अवयव का प्रतिबिम्ब B में एक ही हो। इस प्रकार $f: A \rightarrow B; f(x) = c, \forall x \in A, c \in B$ एक अचर फलन है।



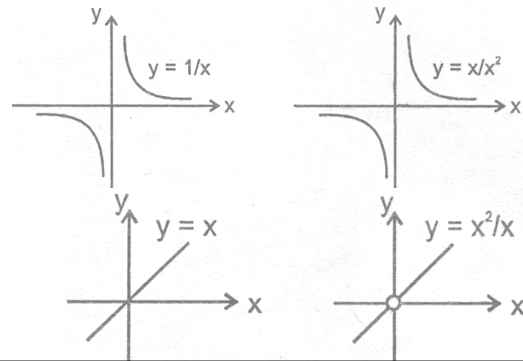
तुल्य या तत्समक फलन (Equal or Identical Functions):

दो फलन f एवं g तत्समक फलन (या समान) कहलाते हैं यदि और केवल यदि

- (i) f का प्रान्त $\equiv g$ का प्रान्त
- (ii) $f(x) = g(x), x$ उनके सर्वनिष्ठ प्रान्त का अवयव हो।

उदाहरणतः $f(x) = \frac{1}{x}$ तथा $g(x) = \frac{x}{x^2}$ तत्समक फलन है।

स्पष्टतया $f(x)$ एवं $g(x)$ के आलेख समान हैं।



लेकिन $f(x) = x$ एवं $g(x) = \frac{x^2}{x}$ तत्समक फलन नहीं है।

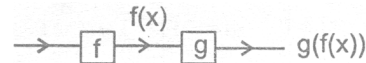
स्पष्टतया $f(x)$ एवं $g(x)$ के आलेख $x = 0$ पर भिन्न हैं।

संयुक्त फलन (Composite Function):

माना $f: X \rightarrow Y_1$ एवं $g: Y_2 \rightarrow Z$ दो फलन हैं तथा समुच्चय $D = \{x \in X : f(x) \in Y_2\}$ है। यदि $D \equiv \phi$, तो फलन $h, h(x) = g\{f(x)\}$ द्वारा परिभाषित D पर g एवं f का संयुक्त फलन कहलाता है एवं $g \circ f$ द्वारा प्रदर्शित करते हैं। यह फलन का फलन भी कहलाता है।

नोट : फलन $g \circ f$ का प्रान्त D है जो X (f का प्रान्त) का उपसमुच्चय है। फलन $g \circ f$ का परिसर फलन g के परिसर का उपसमुच्चय होता है। $D = X$, तब $f(x) \subseteq Y_2$

$g \circ f(x)$ को निम्न चित्र द्वारा दर्शाया जा सकता है।



ध्यान रहे $g \circ f(x)$, x के उन्हीं मानों के लिये परिभाषित है जब $f(x)$ का परिसर $g(x)$ के प्रान्त का उपसमुच्चय हो।

संयुक्त फलनों के गुण (Properties of Composite Functions):

- (a) सामान्यता $g \circ f \neq f \circ g$ होता है (अर्थात् क्रमविनियम नहीं)
- (b) संयुक्त फलन सहचर्य नियम का पालन करते हैं। अर्थात् यदि तीन फलन f, g, h इस प्रकार हैं कि $f \circ (g \circ h)$ तथा $(f \circ g) \circ h$ परिभाषित हो तो $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

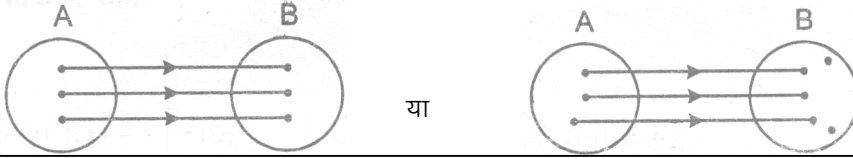
फलनों का वर्गीकरण (Classification of Functions):

फलनों को एकैकी एवं बहुएकी फलन में वर्गीकृत किया जा सकता है।

एकैकी फलन (One - One Function):

फलन $f: A \rightarrow B$ एकैकी फलन कहलाता है यदि A के भिन्न-भिन्न अवयवों के B में भिन्न-भिन्न प्रतिबिम्ब हो।

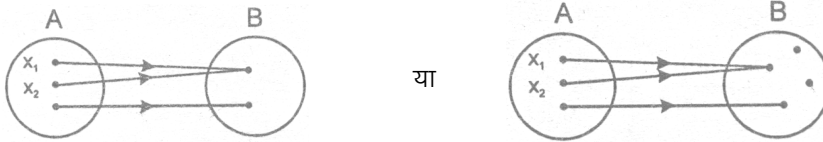
इस प्रकार $x_1, x_2 \in A$ तथा $f(x_1), f(x_2) \in B$ के लिए $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ या $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
 एकैकी प्रतिचित्रण को आरेखीय रूप में इस प्रकार दर्शाया जा सकता है।



बहुएकी फलन (Many-One function):

फलन $f: A \rightarrow B$ बहुएकी फलन कहलाता है यदि A के दो या दो से अधिक अवयवों का एक ही प्रतिबिम्ब B में हों। इस प्रकार $f: A \rightarrow B$ बहुएकी है यदि और केवल यदि कम से कम दो अवयव $x_1, x_2 \in A$ इस प्रकार विद्यमान हो, ताकि $f(x_1) = f(x_2)$ लेकिन $x_1 \neq x_2$

बहुएकी फलन को आरेखीय रूप में इस प्रकार दर्शाया जा सकता है—



नोट: यदि फलन एकैकी है तो यह बहुएकी नहीं हो सकता एवं विलोमतः।

फलन एकैकी है या बहुएकी करने की विधियाँ

(Method for determining whether a given function is ONE - ONE or MANY-ONE):

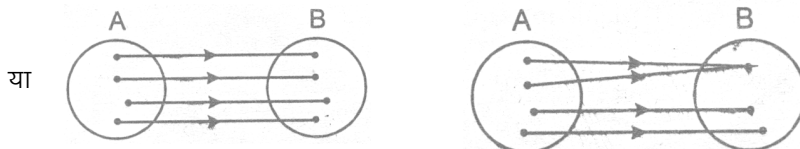
- (a) यदि $x_1, x_2 \in A$ एवं $f(x_1), f(x_2) \in B, f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ or $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, तब फलन एकैकी है अन्यथा बहुएकी।
- (b) यदि एक सरल रेखा x- अक्ष के समान्तर विद्यमान है जो फलन के आरेख को कम से कम दो बिन्दुओं पर काटती है तब फलन बहुएकी होता है अन्यथा एकैकी होता है।
- (c) यदि $f'(x) \geq 0, \forall x \in$ सम्पूर्ण प्रान्त या $f'(x) \leq 0, \forall x \in$ सम्पूर्ण प्रान्त हो, जहाँ समता केवल विभिन्न बिन्दुओं पर हो सकती है तो फलन एकैकी है अन्यथा बहुएकी।

नोट: यदि f एवं g दोनों एकैकी हो, तो gof एवं fog भी एकैकी होगा। (यदि वे विद्यमान हैं) फलनों को आच्छादक एवं अन्तर्क्षेपी फलनों में वर्गीकृत किया जा सकता है।

आच्छादक फलन (Onto function):

यदि फलन $f: A \rightarrow B$ इस प्रकार परिभाषित है कि B (सहप्रान्त) के प्रत्येक अवयव का कम से कम एक पूर्व-प्रतिबिम्ब A में होना चाहिए, तब हम कहते हैं कि f, A से B में आच्छादक फलन है। अतः $f: A \rightarrow B$ आच्छादक है यदि और केवल यदि $\forall b \in B \Rightarrow a \in A$ ताकि $f(a) = b$.

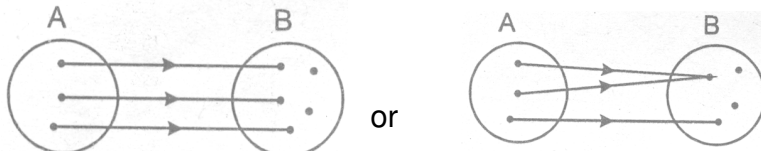
आच्छादक प्रतिचित्रण को आरेखीय रूप में निम्न प्रकार दर्शाया जा सकता है—



अन्तर्क्षेपी फलन (Into function):

यदि फलन $f: A \rightarrow B$ इस प्रकार परिभाषित है कि कम से कम एक अवयव सहप्रान्त में विद्यमान हो जा प्रान्त के किसी अवयव का प्रतिबिम्ब न हो, तब फलन $f(x)$ अन्तर्क्षेपी होता है।

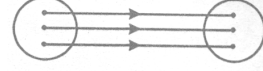
आरेखीय रूप में अन्तर्क्षेपी प्रतिचित्रण इस प्रकार प्रदर्शित कर सकते हैं।



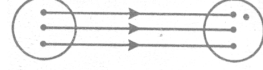
- नोट : (i) यदि $f \equiv g$ सह प्रान्त हो तो $f(x)$ आच्छादक है, अन्यथा अन्तर्क्षेपी
 (ii) यदि फलन आच्छादक है तो वह अन्तर्क्षेपी नहीं हो सकता है एवं विलोमतः ।

अतः फलन इन चारों में से एक हो सकता है

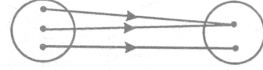
- (a) एकैकी आच्छाक (एकैकी एवं आच्छाक)



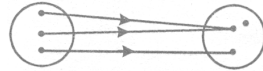
- (b) एकैकी अन्तर्क्षेपी (एकैकी परन्तु आच्छादक नहीं)



- (c) बहु-एकी आच्छाक (आच्छादक परन्तु एकैकी नहीं)



- (d) बहुएकी अन्तर्क्षेपी (न तो एकैकी न ही आच्छादक)



- नोट: (i) यदि फलन f एकैकी एवं आच्छादक दोनों है तो यह एकैकी आच्छादक प्रतिचित्रण कहलाता है। एकैकी आच्छादक फलन को प्रतिलोमीय, व्युत्क्रमणीय या असमान फलन के नाम से भी जानते हैं।
 (ii) यदि विभिन्न 'n' अवयवों से समुच्चय A बनाया जाता है, तब A से A में परिभाषित फलनों की संख्या n^n होती है एवं इनमें से $n!$ एकैकी होते हैं।
 (iii) यदि f एवं g दोनों आच्छादक हो तो $g \circ f$ या $f \circ g$ आच्छादक हो सकता है और नहीं भी।
 (iv) दो एकैकी आच्छादक फलनों का संयुक्त फलन एकैकी आच्छादक होता है यदि और केवल यदि f एवं g एकैकी आच्छादक फलन इस प्रकार हो ताकि $g \circ f$ परिभाषित हो, तो $g \circ f$ भी एकैकी आच्छादक केवल तभी होगा जब f का सह प्रान्त, g के प्रान्त के बराबर हो।

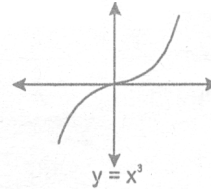
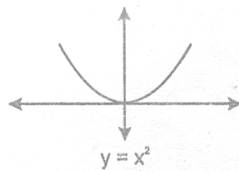
सम एवं विषम फलन (Odd & Even Functions)रू

- (i) यदि फलन f के प्रान्त में x के सभी मानों के लिए $f(-x)=f(x)$ हो, तो 'f' सम फलन कहलाता है।
 e.g. $f(x)=\cos x; g(x)=x^2+3$.
 (ii) यदि फलन f के प्रान्त में x के सभी मानों के लिए $f(-x)=-f(x)$ हो तो 'f' विषम फलन कहलाता है।
 e.g. $f(x)=\sin x; g(x)=x^3+x$.

- नोट: (i) कोई फलन न तो विषम न ही सम हो सकता है। (उदाहरण: $f(x)=e^x, \cos^{-1} x$)
 (ii) कोई $x=0$ पर विषम फलन परिभाषित है, तो $f(x)=0$

सम/विषम फलनों के गुणधर्म (Properties of Even/Odd Function):

- (a) प्रत्येक सम फलन का ग्राफ y - अक्ष के सापेक्ष सममित होता है तथा प्रत्येक विषम फलन मूल बिन्दु के सापेक्ष सममित होता है।
 उदाहरण: $y=x^2$ का आलेख y -अक्ष के प्रति सममित जबकि $y=x^3$ मूल बिन्दु के सापेक्ष सममित है।



- (b) सभी फलनों (जिनका प्रान्त मूल बिन्दु के सापेक्ष सममित है।) को सम फलनों के योग एवं विषम फलनों के योग में विस्तारित किया जा सकता है जो निम्न प्रकार है—

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

- (c) केवल एक फलन जो संख्या रेखा पर परिभाषित है तथायह सम एवं विषम एक तथा है, $f(x)=0$ है।
 (d) यदि f एवं g दोनों सम या विषम है तो फलन $f \cdot g$ सम फलन होगा लेकिन इनमें से कोई एक विषम हो तो $f \cdot g$ विषम फलन होगा।

- (e) यदि $f(x)$ सम है तो $f'(x)$ विषम जबकि विषम फलन का अवकलन सम होता है। ये सभी बातें फलन के समाकलन के लिये भी कही जा सकती हैं।

एक विस्तार/विषम विस्तार (Even extensions / Odd extension):

माना $f(x)$, $[a, b]$ में परिभाषित है जहाँ $ab \geq 0$ इस फलन के समय प्रसार से तात्पर्य है कि इसे $[-b, -a]$ में परिभाषित करना है ताकि यह सम हो। सम विस्तार ज्ञात करने के लिए दी गई परिभाषा में x को $-x$ द्वारा प्रतिस्थापित करते हैं। इसी प्रकार विषम विस्तार से तात्पर्य है कि फलन को $[-b, -a]$ में परिभाषित करना है ताकि यह विषम हो। विषम विस्तार करने के लिए सम विस्तार को -1 से गुणा करते हैं।

आवर्ती फलन (Periodic Functions):

फलन $f(x)$, आवर्तकाल T का आवर्ती फलन कहलाता है यदि वास्तविक संख्या $T > 0$ विद्यमान हो ताकि फलन f के प्रान्त में प्रत्येक x के लिए संख्याएं $x-T$ एवं $x+T$ भी फलन f के प्रान्त में हो तथा फलन f के प्रान्त में x के लिए $f(x) = f(x+T)$ हो आवर्ती फलन का प्रान्त सदैव अपरिबद्ध होता है। T आवर्तकाल के आवर्तकाल फलन का आरेख T के प्रत्येक अन्तराल के बाद पुनरावृत्त होता है।

उदाहरण : फलन $\sin x$ एवं $\cos x$ दोनों 2π से आवर्ती एवं $\tan x, \pi$ से आवर्ती हैं।

न्यूनतम धनात्मक आवर्तकाल, फलन f का मुख्य या आधारभूत मूलभूत आवर्तकाल का फलन f का आवर्तकाल कहलाता है।

नोट: आवर्ती फलन का प्रतिलोम विद्यमान नहीं होता है।

आवर्ती फलन के गुणधर्म (Properties of Periodic Functions):

- (a) यदि फलन $f(x)$ का आवर्तकाल T है तो $\frac{1}{f(x)}$ एवं $\sqrt{f(x)}$ का भी आवर्तकाल T होता है।
- (b) यदि फलन $f(x)$ का आवर्तकाल T है तो $(ax+b)$ का आवर्तकाल $\frac{T}{|a|}$ होता है।
- (c) प्रत्येक अचर फलन जो x के सभी वास्तविक मानों के लिए परिभाषित हो बिना मूलभूत आवर्त काल के सदैव आवर्ती होता है।
- (d) यदि फलन $f(x)$ का आवर्तकाल T_1 एवं $g(x)$ का आवर्तकाल T_2 है तो $f(x) \neq g(x)$ या $f(x) \cdot g(x)$ या $\frac{f(x)}{g(x)}$ का आवर्तकाल T_1 व T_2 का L.C.M. होता है बशर्त कि उनका L.C.M. विद्यमान हो। L.C.M. (यदि विद्यमान हो) मूलभूत आवर्तकाल होना आवश्यक नहीं है। यदि L.C.M. विद्यमान नहीं हो तो $f(x) \neq g(x)$ या $f(x) \cdot g(x)$ या $\frac{f(x)}{g(x)}$ अनावर्ती होते हैं। $\left(\frac{a}{b}; \frac{p}{q}, \frac{\ell}{m}\right)$ का L.C.M. = $\frac{\text{L.C.M.}(a,p,\ell)}{\text{H.C.F.}(b,q,m)}$
- उदाहरणत: $|\sin x|$ का आवर्तकाल π होता है $|\cos x|$ का भी आवर्तकाल π होता है।
 $\therefore |\sin x| + |\cos x|$ का भी आवर्तकाल π होता है। लेकिन $|\sin x| + |\cos x|$ का मूलभूत आवर्तकाल $\frac{\pi}{2}$ होता है।
- (e) यदि g एक फलन इस प्रकार है ताकि फलन f के प्रान्त पर $g \circ f$ परिभाषित हो तथा f, T का आवर्ती फलन हो तो $g \circ f$ भी इसके समान आवर्तकाल T का आवर्ती फलन होता है।

फलन का प्रतिलोम (Inverse of a Function):

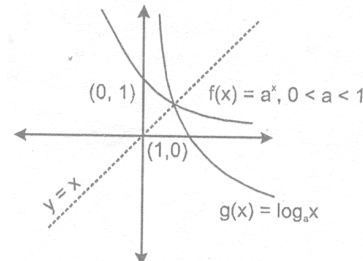
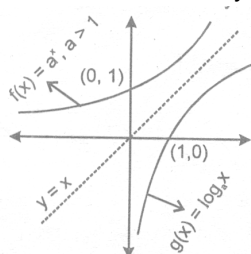
माना $y = f(x): A \rightarrow B$ में एकैकी आच्छादक फलन है, तब $x = g(y): B \rightarrow A$ में एकैकी आच्छादक फलन हमेशा इस प्रकार विद्यमान होगा यदि (p, q) फलन f का अवयव हो, तो (q, p) फलन g का अवयव होता है तथा फलन $f(x)$ एवं $g(x)$ को एक दूसरे का प्रतिलोम कहा जाता है एवं $g(x)$ को $f^{-1}(x)$ एवं $f(x)$ को $g^{-1}(x)$ से प्रदर्शित किया जाता है।

नोट: एकैकी आच्छादक फलन का प्रतिलोम अद्वितीय होता है।

सम फलन का प्रतिलोम परिभाषित नहीं है।

प्रतिलोम फलन के गुण (Properties of Inverse Function):

- (a) f एवं g का आरेख $y = x$ रेखा पर दर्पण प्रतिबिम्ब होते हैं। उदाहरण: $f(x) = x^a$ एवं $g(x) = \log_a x$ एक दूसरे के प्रतिलोम होते हैं, एवं उनके ग्राफ $y = x$ रेखा पर एक दूसरे के दर्पण प्रतिबिम्ब होते हैं जो नीचे दर्शाये गए हैं—



- (b) सामान्यतः f एवं f^{-1} के प्रतिच्छेद बिन्दु सरल रेखा $y=x$ पर स्थित होते हैं। फिर भी यह ध्यान रहना चाहिए कि $f(x)$ एवं $f^{-1}(x)$ प्रतिच्छेद कर सकते हैं और नहीं भी। उदाहरण : $f(x) = 1/x$.
- (c) सामान्यतः $f \circ g(x)$ एवं $g \circ f(x)$ बराबर नहीं होते लेकिन यदि f एवं g एक दूसरे के प्रतिलोम हो, तब $g \circ f = f \circ g$. लेकिन यदि f एवं g एक दूसरे के प्रतिलोम न हो तब भी $f \circ g(x)$ एवं $g \circ f(x)$ बराबर हो सकते हैं।
 उदाहरण : $f(x) = x+1, g(x) = x+2$. तथापि यदि $f \circ g(x) = g \circ f(x) = x$, तब $g(x) = f^{-1}(x)$
- (d) यदि दो एकैकी अच्छादक फलन f एवं $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ हो तो $g \circ f$ का प्रतिलोम विद्यमान होता है तथा $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
- (e) यदि $f(x)$ एवं g एक दूसरे के प्रतिलोम फलन हैं तो $f'g(x) = \frac{1}{g'(x)}$

सामान्य (General tips): यदि x, y स्वतंत्र चर हो तो (i) $f(xy) = f(x) + f(y) \Rightarrow f(x) = k \ln x$ or $f(x) = 0$
 (ii) $f(xy) = f(x) \cdot f(y) \Rightarrow f(x) = x^n, n \in \mathbb{R}$ (iii) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \Rightarrow f(x) = a^{kx}$.
 (iv) $f(x+y) = f(x) + f(y) \Rightarrow f(x) = kx$, जहाँ k एक अचर है।

Exercise - 1

1-A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. यदि $f(x) = \cos\left[\frac{\pi^2}{2}\right]x + \sin\left[-\frac{\pi^2}{2}\right]x$, जहाँ $[x]$ महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है, तो निम्नलिखित में से कौन-सा सही नहीं है—
 (A) $f(0) = 1$ (B) $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}+1}$ (C) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ (D) $f(\pi) = 0$
2. यदि $f(x) = |x-1|$ हो तो—
 (A) $f(x^2) = (f(x))^2$ (B) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (C) $f(|x|) = |f(x)|$ (D) इनमें से कोई नहीं
3. यदि $f(x) = \frac{ax-c}{cx-a} = y$ हो तो $f(y)$ बराबर है—
 (A) x (B) $\frac{1}{x}$ (C) 1 (D) 0
4. फलन $f(x) = \sin^{-1}(|x-1|-2)$ का प्रान्त है—
 (A) $[-2,0] \cup [2,4]$ (B) $(-2,0) \cup (2,4)$ (C) $[-2,0] \cup [1,3]$ (D) $(-2,0) \cup (1,3)$
5. फलन $f(x) = \frac{\sqrt{-\log_{0.3}(x-1)}}{\sqrt{x^2+2x+8}}$ का प्रान्त है—
 (A) $(1,4)$ (B) $(-2, 4)$ (C) $(2, 4)$ (D) $[2, \infty)$
6. यदि फलन $f(x) = \cot^{-1}\sqrt{(x+3)x} + \cos^{-1}\sqrt{x^2+3x+1}$ समुच्चय S पर परिभाषित हो, तो समुच्चय S है—
 (A) $\{0, 3\}$ (B) $(0, 3)$ (C) $\{0, -3\}$ (D) $[-3, 0]$
7. फलन $f(x) = \log(3x^2 - 4x + 5)$ का परिसर है—
 (A) $\left[\log\frac{11}{3}, \infty\right)$ (B) $[\log 10, \infty)$ (C) $\left[\log\frac{11}{6}, \infty\right)$ (D) $\left[\log\frac{11}{12}, \infty\right)$
8. फलन $f(x) = 4^x + 2^x + 1$ का परिसर है—
 (A) $(0, \infty)$ (B) $(1, \infty)$ (C) $(2, \infty)$ (D) $(3, \infty)$
9. फलन $f(x) = \log_{\sqrt{5}}\{\sqrt{2}(\sin x - \cos x) + 3\}$ का परिसर है—
 (A) $[0, 1]$ (B) $[0, 2]$ (C) $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ (D) इनमें से कोई नहीं

10. निम्नलिखित फलनों में से कौनसा युग्म तत्समक है—
 (A) $f(x) = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ एवं $g(x) = \frac{\pi}{2}$ (B) $f(x) = \tan^{-1} x + \cot^{-1} x$ एवं $g(x) = \frac{\pi}{2}$
 (C) $f(x) = \sec^{-1} x + \operatorname{cosec}^{-1} x$ एवं $g(x) = \frac{\pi}{2}$ (D) उपरोक्त सभी
11. माना $f(x)$ एक फलन है जिसका प्रान्त $[-5, 7]$ है। यदि $g(x) = |2x + 5|$ हो, तो $(f \circ g)(x)$ का प्रान्त है—
 (A) $[-4, 1]$ (B) $[-5, 1]$ (C) $[-6, 1]$ (D) इनमें से कोई नहीं
12. यदि $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ हो तो $(f \circ g)(x) = x$, यह इस शर्त पर है कि—
 (A) $d + a = 0$ (B) $d - a = 0$ (C) $a = b = c = d = 1$ (D) $a = b = 1$
13. $f: [2, \infty) \rightarrow Y$ में $f(x) = x^2 - 4x + 5$ द्वारा परिभाषित फलन एकैकी एवं आच्छादक दोनों है यदि —
 (A) $Y = R$ (B) $Y = [1, \infty)$ (C) $Y = [4, \infty)$ (D) $Y = [5, \infty)$
14. यदि $f: R \rightarrow R, f(x) = \frac{2x^2 - x + 5}{7x^2 + 2x + 10}$ द्वारा परिभाषित फलन हो तो, f है—
 (A) एकैकी किन्तु आच्छादक नहीं (B) आच्छादक किन्तु एकैकी नहीं
 (C) एकैकी तथा आच्छादक (D) न तो एकैकी न ही आच्छादक
15. यदि फलन $f: R \rightarrow R, f(x) = x^3 + x^2 + 3x + \sin x$ द्वारा परिभाषित हो, तो फलन f है—
 (A) एकैकी एवं आच्छादक (B) एकैकी एवं अन्तःक्षेपी
 (C) बहुएकी एवं आच्छादक (D) बहुएकी एवं अन्तःक्षेपी
16. फलन $f(x) = \log\left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right)$ है—
 (A) सम फलन (B) विषम फलन (C) न तो सम न ही विषम (D) सम एवं विषम दोनों
17. फलन $f(x) = [x] + \frac{1}{2}, x \in I$ है—
 (A) सम (B) विषम (C) न सम न विषम (D) इनमें से कोई नहीं
18. $f(x) = \sec(\sin x)$ का मूलभूत आवर्तकाल है—
 (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) 2π (C) π (D) अनावर्ती
19. यदि $f(x) = \sin\sqrt{[a]} x$ (जहाँ $[.]$ महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है।) का मूलभूत आवर्तकाल π हो, तो—
 (A) $a = 1$ (B) $a = 9$ (C) $a \in [1, 2]$ (D) $a \in [4, 5]$
20. फलन $f(x) = x + a - [x + b] + \sin \pi x + \cos 2\pi x + \sin 3\pi x + \cos 4\pi x + \dots + \sin(2n-1)\pi x + \cos 2n\pi x$ का प्रत्येक $a, b \in R$ के लिए मूलभूत आवर्तकाल है— (जहाँ $[.]$ महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है।)
 (A) 2 (B) 4 (C) 1 (D) 0
21. फलन $f(x) = y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ का प्रतिलोम है—
 (A) $\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$ (B) $\frac{1}{2} \log \frac{2+x}{2-x}$ (C) $\frac{1}{2} \log \frac{1-x}{1+x}$ (D) $2 \log(1+x)$
22. यदि $f(x) = \cos(\ell n x)$ हो, तो $f(x)f(y) - \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{x}{y}\right) + f(xy) \right]$ का मान है—
 (A) -1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) -2 (D) इनमें से कोई नहीं
23. यदि $y = f(x)$ प्रतिबन्ध $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} (x \neq 0)$ को संतुष्ट करता है, तो $f(x) =$
 (A) $-x^2 + 2$ (B) $-x^2 - 2$ (C) $x^2 - 2, x \in R - \{0\}$ (D) $x^2 - 2, |x| \in [2, \infty)$
24. यदि $f(1) = 1$ एवं $f(n+1) = 2f(n) + 1$ यदि $n \geq 1$, हो $f(n) =$
 (A) $2^n + 1$ (B) 2^n (C) $2^n - 1$ (D) $2^{n-1} - 1$
25. फलन $f: R \rightarrow R$ द्वारा परिभाषित फलन प्रतिबन्ध $x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$ को सन्तुष्ट करता है, तो $f(x)$ है—

26. यदि x और y समीकरणों $y = 2[x]+3$ एवं $y = 3[x-2]$ को एक साथ सन्तुष्ट करते हैं, तो $[x+y]=$
 (A) 21 (B) 9 (C) 30 (D) 12

एक से अधिक विकल्प सही

27. निम्नलिखित फलनों के युग्मों में से कौनसे तत्सम हैं—
 (A) $f(x) = e^{\ln \sec^{-1} x}$ & $g(x) = \sec^{-1} x$ (B) $f(x) = \tan(\tan^{-1} x)$ & $g(x) = \cot(\cot^{-1} x)$
 (C) $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ & $g(x) = \operatorname{sgn}(\operatorname{sgn}(x))$ (D) $f(x) = \cot^2 x \cdot \cos^2 x$ & $g(x) = \cot^2 x - \cos^2 x$
28. माना कि $f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right), 0 \leq x \leq 1$ और $g(x) = 4x(1-x), 0 \leq x \leq 1$ हो, तो
 (A) $f \circ g = \frac{1-4x+4x^2}{1+4x-4x^2}, 0 \leq x \leq 1$ (B) $f \circ g = \frac{1-4x-4x^2}{1+4x-4x^2}, \frac{1}{2} \leq x \leq 1$
 (C) $g \circ f = \frac{8x(1-x)}{(1+x)^2}, 0 \leq x \leq 1$ (D) $g \circ f = \frac{8x(1+x)}{(1+x)^2}, 0 \leq x \leq 1$
29. यदि 'f' एवं 'g' एकैकी आच्छादक फलन हैं तथा $g \circ f$ परिभाषित है, तो $g \circ f$ होना चाहिए—
 (A) एकैकी (B) आच्छादक (C) एकैकी आच्छादक (D) केवल अन्तर्क्षेपी
30. निम्नलिखित फलनों का प्रान्त $D \equiv [-1, 1]$ है, इनमें से कौनसे फलन एकैकी हैं—
 (A) $f(x) = x^2$ (B) $g(x) = x^3$ (C) $h(x) = \sin 2x$ (D) $k(x) = \sin(\pi x/2)$
31. माना कि $f: I \rightarrow R$ (जहाँ I धनात्मक पूर्णाकों को समुच्चय है) $f(x) = \sqrt{x}$ द्वारा परिभाषित फलन है तो f है—
 (A) एकैकी (B) बहुएकैकी (C) आच्छादक (D) अन्तर्क्षेपी
32. फलन $f(x) = \sin^4 3x + \cos^4 3x$ का आवर्तकाल है—
 (A) $\pi/6$ (B) $\pi/3$ (C) $\pi/2$ (D) $\pi/12$
33. वे फलन जो अनावर्ती हैं (जहाँ $[x]$ महत्तम पूर्णाक फलन को प्रदर्शित करता है।)
 (A) $y = [x+1]$ (B) $y = \sin x^2$ (C) $y = \sin^2 x$ (D) $y = \sin^{-1} x$
34. यदि $f: R \rightarrow [-1, 1]$ जहाँ $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}[x]$, (जहाँ $[]$ महत्तम पूर्णाक फलन को प्रदर्शित करता है) तो—
 (A) $f(x)$ आच्छादक है। (B) $f(x)$ अन्तर्क्षेपी है। (C) $f(x)$ आवर्ती है। (D) $f(x)$ बहुएकैकी है।
35. गलत कथनों की पहचान कीजिए—
 (A) फलन $f(x) = \cos(\cos^{-1} x)$ न तो विषम है न ही सम
 (B) $f(x) = \cos(\sin x) + \cos(\cos x)$ का मूलभूत आवर्तकाल π है।
 (C) फलन $f(x) = \cos(3 \sin x)$ का परिसर $[-1, 1]$ है।
 (D) इनमें से कोई नहीं

1-B (विषयात्मक प्रश्न)

1. यदि $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$ हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि $f(x) + f(1-x) = 1$
2. जाँच कीजिए $x^2 + y^2 = 36$ एक फलन को प्रदर्शित करता है या नहीं।
3. यदि $A \equiv \{ab\}$ एवं $B \equiv \{\alpha, \beta, \gamma\}$, हो तो समुच्चय A से B में परिभाषित सभी संभव फलनों के आरेख चित्र खींचिए।
4. निम्नलिखित फलनों के प्रान्त ज्ञात कीजिए—
 (i) $f(x) = \frac{\sin^{-1} x}{x}$ (ii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+|x|}}$ (iii) $f(x) = e^{x+\sin x}$
 (iv) $f(x) = \frac{1}{\log_{10}(1-x)} + \sqrt{x+2}$ (v) $f(x) = \sqrt{1-2x} + 3 \sin^{-1}\left(\frac{3x-1}{2}\right)$
 (vi) $f(x) = \log_x \log_2\left(\frac{1}{x-1/2}\right)$
5. निम्नलिखित फलनों के आलेख खींचिए—
 (i) $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ (ii) $f(x) = \operatorname{sgn}([x])$ जहाँ $[x]$ महत्तम पूर्णाक फलन को प्रदर्शित करता है।

$$(iii) f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{if } x > 1 \\ 1 & \text{if } x = 1 \\ 2x, & \text{if } x < 1 \end{cases} \quad (iv) f(x) = \log_{1/2}(x-3)$$

$$(v) f(x) = 2^{3-x} \quad (vi) f(x) = e^{|x|}$$

6. निम्नलिखित फलनों के परिसर ज्ञात कीजिए—

$$(i) f(x) = |x-3| \quad (ii) f(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad (iii) f(x) = \sqrt{16-x^2} \quad (iv) f(x) = \frac{|x-4|}{x-4}$$

7. निम्नलिखित फलनों के प्रान्त एवं परिसर ज्ञात कीजिए—

$$(i) f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+3\sin x}} \quad (ii) f(x) = x! \quad (iii) f(x) = \frac{x^2-9}{x-3} \quad (iv) f(x) = \sin^2(x^3) + \cos^2(x^3)$$

8. निम्नलिखित फलनों के परिसर ज्ञात कीजिए—

$$(i) f(x) = 5 + 3 \sin x + 4 \cos x \quad (ii) f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}} \quad (iii) f(x) = \ln(\sin^{-1} x) \quad (iv) f(x) = 2 - 3x - 5x^2$$

$$(v) 3|\sin x| - 4|\cos x| \quad (vi) \frac{\sin x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} + \frac{\cos x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$$

9. जाँच कीजिए की निम्नलिखित फलनों के युग्म तत्समक है या नहीं।

$$(i) f(x) = \sqrt{x^2} \text{ और } g(x) = (\sqrt{x})^2$$

$$(ii) f(x) = \sec(\sec^{-1}) \text{ और } g(x) = \operatorname{cosec}(\operatorname{cosec}^{-1}x)$$

$$(iii) f(x) = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} \text{ और } g(x) = \cos x$$

$$(iv) f(x) = x^{10} \text{ और } g(x) = e^{\ln x}$$

$$f(x) = \log(x-1) - \log(x-2) \text{ एवं } g(x) = \log\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$$

10. x के किस मान के लिये दिये गये फलन तत्समक है।

11. यदि $f(x) = x^2 + x + 1$ एवं $g(x) = \sin x$ हो तो प्रदर्शित कीजिए कि $f \circ g \neq g \circ f$.

12. यदि $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = \sqrt{x}$ हो, तो सत्यापित कीजिए कि $[f \circ (g \circ h)](x)$ एवं $[(f \circ g) \circ h](x)$ बराबर है।

13. $f \circ g$ एवं $g \circ f(x)$ ज्ञात कीजिए यदि —

$$(i) f(x) = e^x; g(x) = \log x$$

$$(ii) f(x) = |x|; g(x) = \sin x$$

$$(iii) f(x) = \sin^{-1} x; g(x) = x^2$$

$$(iv) f(x) = x^2 + 2; g(x) = 1 - \frac{1}{1-x}, x \neq 1$$

14. यदि $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x \leq 1 \\ x+1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ और $g(x) = 1-x; -2 \leq x \leq 1$ हो, तो फलन $f \circ g(x)$ को परिभाषित कीजिए।

15. जाँच कीजिए कि दिये गये फलन एकैकी है या बहुएकी ?

$$(i) f(x) = |x^2 + 5x + 6|$$

$$(ii) f(x) = |\log x|$$

$$(iii) f(x) = \sin 4x, x \in \left(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right)$$

$$(iv) f(x) = x + \frac{1}{x}, x \in (0, \infty) \quad (v) f(x) = \sqrt{1 - e^{\left(\frac{1}{x}-1\right)}}$$

$$(vi) f(x) = \frac{3x^2}{4\pi} - \cos \pi x$$

$$(vii) f(x) = \sin^{-1} x - \cos^{-1} x$$

16. माना $f: D \rightarrow R$, जहाँ D इसका प्रान्त है। जाँच कीजिए कि दिये गये फलन अन्तर्क्षेपी है या आच्छादक ?

$$(i) f(x) = \frac{1+x^6}{x^3}$$

$$(ii) f(x) = x \cos x$$

$$(iii) f(x) = \frac{1}{\sin \sqrt{|x|}}$$

$$(iv) \tan(2 \sin x)$$

17. फलन $f(x): R \rightarrow R$ द्वारा परिभाषित निम्नलिखित फलनों को एकैकी, आच्छादक, दोनों या कोई नहीं में वर्गीकृत कीजिए—

- (i) $f(x) = x|x|$ (ii) $f(x) = x^2$
 (iii) $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ (iv) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
18. माना कि $f: A \rightarrow A$ जहाँ $A = \{x: -1 \leq x \leq 1\}$ जाँच कीजिए कि दिये गये फलन एकैकी आच्छादक है या नहीं ?
 (i) $x - \sin$ (ii) $x|x|$ (iii) $\tan \frac{\pi x}{4}$ (iv) x^4
19. निम्नलिखित फलनों के सम या विषम या न तो सम और न ही विषम होने का निर्धारण कीजिए।
 (i) $\tan x$ (ii) $\cos x$ (iii) $\sin(x^2+1)$ (iv) $x + x^2$ (v) $x - x^3$
 (vi) $f(x) = x \left(\frac{a^x - 1}{a^x + 1} \right)$ (vii) $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ (viii) $f(x) = \sin x + \cos x$ (ix) $f(x) = (x^2 - 1)|x|$
20. यदि $f(x) = \begin{cases} x^2 + \sin x & 0 \leq x < 1 \\ x + e^{-x} & x \leq 1 \end{cases}$ हो, तो
 $x \in (-\infty, 0)$ के लिए फलन $f(x)$ की परिभाषा का विस्तार कीजिए जिसके लिए $f(x)$
 (i) सम फलन है। (ii) विषम फलन है।
21. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित फलन आवर्ती फलन नहीं हैं—
 (i) $f(x) = \sin \sqrt{x}$ (ii) $f(x) = x + \sin x$
22. निम्नलिखित फलनों के मूलभूत आवर्तकाल ज्ञात कीजिए—
 (i) $f(x) = 2 + 3\cos(x - 2)$ (ii) $f(x) = \sin 3x + \cos^2 x + |\tan x|$
 (iii) $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4} + \sin \frac{\pi x}{3}$ (iv) $f(x) = \cos \frac{3}{5}x - \sin \frac{2}{7}x$
 (v) $f(x) = [\sin 3x] + [\cos 6x]$ (vi) $f(x) = \frac{1}{1 - \cos x}$
 (vii) $f(x) = \frac{\sin 12x}{1 + \cos^2 6x}$ (viii) $f(x) = \sec^3 x + \operatorname{cosec}^3 x$
23. माना $f: D \rightarrow R$ जहाँ D, f प्रान्त है। f का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए, यदि विद्यमान है जहाँ
 (i) $f(x) = 1 - 2^{-x}$ (ii) $f(x) = (4 - (x - 7)^3)^{1/5}$ (iii) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$
24. माना $f: R \rightarrow R$ इस प्रकार है कि
 $f(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$ क्या $f(x)$ प्रतिलोमीय है ? यदि हाँ, तो इसका प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।
25. हल कीजिए : $2x^2 - 5x + 2 = \frac{5 - \sqrt{9 + 8x}}{4}$ जहाँ $x < \frac{5}{4}$
26. सम्बन्ध $f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2(1-2x)}{x(1-x)}$ को संतुष्ट करने वाला फलन f ज्ञात कीजिए।
27. यदि $f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \forall x, y \in N$ और $f(1) = 2$ हो, तो $\sum_{n=1}^{10} f(n)$ ज्ञात कीजिए।

Exercise -2

2-A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. फलन $f(x) = \log_{12} \left(-\log_2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right) - 1 \right)$ का प्रान्त है—
 (A) $0 < x < 1$ (B) $0 < x \leq 1$ (C) $x \geq 1$ (D) रिक्त समुच्चय
2. फलन $f(x) = \sqrt{\frac{1}{(x-1)\cos^{-1}(2x+1)\tan 3x}}$ का प्रान्त है—

- (A) (-1, 0) (B) $(-1, 0) - \left\{ -\frac{\pi}{6} \right\}$ (C) $(-1, 0) - \left\{ -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{2} \right\}$ (D) $\left(-\frac{\pi}{6}, 0 \right)$
3. फलन $f(x) = \sin^{-1} \left(\frac{1+x^3}{2x^{3/2}} \right) + \sqrt{\sin(\sin x)} + \log_{(3\{x\}+1)}(x^2+1)$ का प्रान्त है—
 (जहाँ $\{x\}$ फलन के भिन्नात्मक भाग को प्रदर्शित करता है)
 (A) $x \in \{1\}$ (B) $x \in \mathbb{R} - \{1, -1\}$ (C) $x > 3, x \neq 1$ (D) इनमें से कोई नहीं (null set)
4. यदि प्रतिचित्रण $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cot^{-1}(x^2 - 4x + 3)$ द्वारा परिभाषित हो, तो अन्तराल \mathbb{R} का प्रतिबिम्ब है—
 (A) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$ (B) $\left[\frac{\pi}{4}, \pi \right)$ (C) $(0, \pi)$ (D) $\left(0, \frac{3\pi}{4} \right]$
5. यदि $f(x) = \frac{x - [x]}{1 + x - [x]}, x \in \mathbb{R}$, हो तो $f(x)$ का परिसर है (यहाँ $[.]$ महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है)
 (A) $\left(0, \frac{1}{2} \right]$ (B) $\left[0, \frac{1}{2} \right)$ (C) $\left[0, \frac{1}{2} \right]$ (D) $\left(0, \frac{1}{2} \right)$
6. फलन $f(x) = \log_{\sqrt{2}}(2 - \log_2(16 \sin^2 x + 1))$ का परिसर है—
 (A) $(-\infty, 1)$ (B) $(-\infty, 2)$ (C) $(-\infty, 1]$ (D) $(-\infty, 2]$
7. निम्नलिखित फलनों के युग्म में से कौन सा तत्समक है—
 (A) $\sqrt{1 + \sin x}, \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$ (B) $\sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2}, 2 \tan^{-1} x$
 (C) $\sqrt{x^2}, (\sqrt{x})^2$ (D) $\ln x^3 + \ln x^2, 5 \ln x$
8. निम्नलिखित फलनों के युग्म में से कौन सा एक तत्समक है—
 (A) $e^{(\ln x)/2}$ और \sqrt{x} (B) $\tan^{-1}(\tan x)$ और $\cot^{-1}(\cot x)$
 (C) $\cos^2 x + \sin^4 x$ और $\sin^2 x + \cos^4 x$ (D) $\frac{|x|}{x}$ एवं $\text{sgn}(x)$ (जहाँ $\sin(x)$ सिग्नेम फलन को बताता है)
9. यदि फलन $f(x)$ का प्रान्त $(-\infty, 0)$ हो तो $f(6\{x\}^2 - 5\{x\} + 1)$ का प्रान्त है (जहाँ $\{.\}$ फलन के भिन्नात्मक भाग को प्रदर्शित करता है।)
 (A) $\bigcup_{n \in \mathbb{I}} \left[n + \frac{1}{3}n + \frac{1}{2} \right]$ (B) $(-\infty, 0)$ (C) $\bigcup_{n \in \mathbb{I}} \left[n + \frac{1}{6}n + 1 \right]$ (D) इनमें से कोई
10. यदि $f(x) = \cot^{-1} x : \mathbb{R}^+ \rightarrow \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ एवं
 $g(x) = 2x - x^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ हो तो फलन $f(g(x))$ जहाँ परिभाषित है, का परिसर है—
 (A) $\left(0, \frac{\pi}{2} \right)$ (B) $\left(0, \frac{\pi}{2} \right]$ (C) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right)$ (D) $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$
11. यदि $f(x) = \frac{4a-7}{3}x^3 + (a-3)x^2 + x + 5$ एकैकी फलन हो तो
 (A) $2 \leq a \leq 8$ (B) $1 \leq a \leq 2$ (C) $0 \leq a \leq 1$ (D) इनमें से कोई नहीं
12. माना $f: (e, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(\ln(\ln x))$ द्वारा परिभाषित है, तो
 (A) f एकैकी है लेकिन आच्छादक नहीं (B) f आच्छादक है लेकिन एकैकी नहीं
 (C) f एकैकी एवं आच्छादक है (D) f न तो एकैकी है न ही आच्छादक है।
13. यदि $f(x) = 2[2] + \cos x$ हो, जहाँ $[.]$ महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है तो $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 (A) एकैकी एवं आच्छादक (B) एकैकी एवं अन्तःक्षेपी
 (C) बहुएकैकी एवं अन्तःक्षेपी (D) बहुएकैकी एवं आच्छादक
14. फलन $f(x) = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} + 1$ है—
 (A) विषम फलन (B) सम फलन (C) न तो विषम न ही सम फलन (D) बहुएकैकी एवं आच्छादक

15. यदि फलन $f(x) = \frac{x^x - 1}{x^n(a^x + 1)}$ का आरेख y - अक्ष के सापेक्ष सममित हो तो $n =$
 (A) 2 (B) 2/3 (C) 1/4 (D) -1/3
16. $\sin \frac{\pi}{4}[x] + \cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{3}[x]$ का आवर्तकाल है- (जहाँ $[x]$, x के महत्तम पूर्णांक को प्रदर्शित करता है।)
 (A) 8 (B) 12 (C) 24 (D) अनावर्ती
17. फलन $f(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] - 3x + 15$ का मूलभूत आवर्तकाल है-
 (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) 1 (D) अनावर्ती
18. $f(x) = |x - 1|, f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = e^x, g: [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ यदि फलन $f \circ g(x)$ परिभाषित हो तो इसके प्रान्त और परिसर क्रमशः है-
 (A) $(0, \infty) \& [0, \infty)$ (B) $(-1, \infty) \& [0, \infty)$
 (C) $[-1, \infty) \& \left[1 - \frac{1}{e}, \infty\right)$ (D) $[-1, \infty) \& \left[\frac{1}{e} - 1, \infty\right)$
19. यदि $f(2, 4) \rightarrow (1, 3)$, एक फलन है जो $f(x) = x - \left[\frac{x}{2}\right]$ द्वारा परिभाषित है तो $f^{-1}(x)$ का मान है-
 (जहाँ $[]$ महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है)
 (A) $2x$ (B) $x + \left[\frac{x}{2}\right]$ (C) $x + 1$ (D) $x - 1$

एक से अधिक विकल्प सही

20. फलन $f(x) = \ln(\sin^{-1} \log^2)$ के लिए
 (A) प्रान्त $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ (B) परिसर $\left(-\infty, \ln \frac{\pi}{2}\right]$ (C) प्रान्त $(1, 2]$ (D) \mathbb{R} परिसर
21. प्रतिचित्रण $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ द्वारा परिभाषित फलन एकैकी आच्छादक है यदि -
 (A) $b^2 \leq 3a$ (B) $a^2 \leq 3b$ (C) $a^2 \geq 3b$ (D) $b^2 \geq 3a$
22. यदि $F(x) = \frac{\sin \pi[x]}{\{x\}}$, हो तो $F(x)$
 (A) मूलभूत आवर्तकाल 1 का आवर्ती फलन है (B) सम फलन है
 (C) एकल परिसर है
 (D) $\operatorname{sgn}\left(\operatorname{sgn} \frac{\{x\}}{\sqrt{\{x\}}}\right) - 1$ के तत्समक है, जहाँ $\{x\}$ फलन के भिन्नात्मक भाग को प्रदर्शित करता है तथा $[]$ महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है एवं $\operatorname{sgn}(x)$ एक सिग्नेम फलन है।
23. माना $f: [-1, 1] \rightarrow [0, 2]$ एक रैखिक फलन है जो आच्छादक है, तो $f(x)$ है-
 (A) $1 - x$ (B) $1 + x$ (C) $x - 1$ (D) $x + 2$
24. $[-1, 1]$ से $[-1, 1]$ में परिभाषित निम्नलिखित फलनों में से कौनसे फलन एकैकी आच्छादक नहीं है-
 (A) $\sin(\sin^{-1} x)$ (B) $\frac{\pi}{2} \sin^{-1}(\sin x)$ (C) $(\operatorname{sgn} x) \ln e^x$ (D) $x^3 \operatorname{sgn} x$
25. फलन $f(x) = \sin x + \tan x + \operatorname{sgn}(x^2 - 6x + 10)$ है-
 (A) 2π आवर्त का आवर्ती फलन (B) π आवर्त का आवर्ती फलन
 (C) अनावर्ती फलन (D) 4π आवर्त का आवर्ती फलन
26. फलन 'f' प्राकृत संख्याओं से पूर्णाकों पर

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2}, & \text{जब } n \text{ विषम है} \\ -\frac{n}{2}, & \text{जब } n \text{ सम है} \end{cases}$$
 द्वारा परिभाषित फलन है-

(A) एकैकी (B) बहुएकैकी (C) आच्छादक (D) अन्तःक्षेपी

2-B (विषयात्मक प्रश्न)

1. निम्नलिखित फलनों के प्रान्त ज्ञात कीजिए—

(i) $f(x) = \sqrt{3-2^x} - 2^{1-x}$

(ii) $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$

(iii) $f(x) = (x^2 + x + 1)^{-3/2}$

(iv) $f(x) = \sqrt{\tan x - \tan^2 x}$

(v) $f(x) = \sqrt{\log_{1/4} \left(\frac{5x-x^2}{4} \right)}$

2. निम्नलिखित फलनों के लेखाचित्र खींचिए (जहाँ $[x]$ एवं $\{x\}$, x के पूर्णांक एवं भिन्नात्मक भाग को प्रदर्शित करता है)

(i) $y = [x] + \sqrt{\{x\}}$

(ii) $y = x + \sin x$

3. निम्नलिखित फलनों के परिसर ज्ञात कीजिए—

(i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-5}}$

(ii) $f(x) = \frac{1}{2-\cos 3x}$

(iii) $f(x) = 3\sin \sqrt{\frac{\pi^2}{16} - x^2}$

(iv) $f(x) = x^3 - 12x$, where (जहाँ) $x \in [-3,1]$

(v) $f(x) = \sin^2 x + \cos^4 x$

4. फलन $f(x) = |x^2 - 4|x| + 3|$ का आरेख खींचिए तथा 'a' के मानों का समुच्चय भी ज्ञात कीजिए जिसके लिए समीकरण $f(x) = a$ के ठीक चार भिन्न-भिन्न वास्तविक मूल हो।

5. यदि $f(x) = -|x-2|, 0 \leq x \leq 4$

$g(x) = 2 - |x|, -1 \leq x \leq 3$

तब fog(x), gof(x), fof(x) एवं gog(x) ज्ञात कीजिए। fog(x) एवं gof(x) के कच्चे आरेख खींचिए।

6. यदि $f(x) = \ln(x^2 - x + 2); R^+ \rightarrow R$ एवं

$g(x) = \{x\} + 1; [1,2] \rightarrow [1,2]$ जहाँ $\{x\}$, x के भिन्नात्मक भाग को प्रदर्शित करता है यदि $f(g(x))$

परिभाषित हो तो इसका प्रान्त एवं परिसर ज्ञात कीजिए।

7. फलन $f: R \rightarrow R$ जहाँ R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है,

$f(x) = \frac{\alpha x^2 + 6x - 8}{\alpha + 6x - 8x^2}$ द्वारा परिभाषित है, फलन f के आच्छादक होने के लिए α के मानों का समुच्चय ज्ञात कीजिए।

क्या $\alpha = 3$ के लिए फलन एकैकी है। अपने उत्तर को सत्यापित कीजिए।

8. निम्नलिखित फलन सम या विषम होने या नहीं की जांच कीजिए—

(i) $f(x) = \frac{(1+2^x)^7}{2^x}$

(ii) $f(x) = \frac{\sec x + x^2 - 9}{x \sin x}$

(iii) $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$

(iv) $f(x) = \begin{cases} x|x|, & x \leq -1 \\ [1+x] + [1-x], & -1 < x < 1 \\ -x|x|, & \end{cases}$

(v) $f(x) = \frac{2x(\sin x + \tan x)}{2\left[\frac{x+2\pi}{\pi}\right] - 3}$ जहाँ $[]$ महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है।

9. निम्नलिखित फलनों के आवर्तकाल ज्ञात कीजिए—

(i) $f(x) = 1 - \frac{\sin^2 x}{1 + \cot x} - \frac{\cos^2 x}{1 + \tan x}$

(ii) $f(x) = \tan \frac{\pi}{2} [x]$. जहाँ $[]$ महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है।

(iii) $f(x) = \log(2 + \cos 3x)$

(iv) $f(x) = e^{\ln \sin x} + \tan^3 x - \operatorname{cosec}(3x - 5)$

(v) $f(x) = \sin x + \tan \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2^2} + \tan \frac{x}{2^3} + \dots + \sin \frac{x}{2^{n-1}} + \tan \frac{x}{2^n}$

(vi) $f(x) = \frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x}$

10. यदि x के सभी वास्तविक मानों के लिए वास्तविक मान फलन f इस प्रकार परिभाषित है कि धनात्मक अचर 'a' के कुछ मानों के लिए समीकरण $f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2}$, x के सभी मानों के लिए सही हो। सिद्ध कीजिए कि फलन f आवर्ती फलन है।
11. माना $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, जहाँ $f(x) = x + (-1)^{x-1}$. तो f का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।
12. माना फलन f प्रान्त $\{x, y, z\}$ एवं परिसर $\{1, 2, 3\}$ वाला एकैकी फलन है। यह दिया गया है कि कथनों $f(x) = 1; f(y) \neq 1; f(z) \neq 2$, में से ठीक एक ही सत्य है तथा शेष दो असत्य है तो $f^{-1}(1)$ ज्ञात कीजिए।
13. प्राकृत संख्या a ज्ञात कीजिए जिसके लिए $\sum_{k=1}^n f(a+k) = 16(2^n - 1)$ जहाँ सभी प्राकृत संख्याओं x, y के लिए फलन f सम्बन्ध $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ को संतुष्ट करता है और $f(1) = 2$.
14. माना कि $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ जहाँ A, B, C वास्तविक संख्याएं हैं। सिद्ध कीजिए कि यदि $f(x)$ एक पूर्णांक है जब x पूर्णांक है, तो संख्याएं $2A, A + B$ और C भी पूर्णांक हैं। विलोमतः सिद्ध कीजिए कि यदि संख्याएं $2A, A + B$ और C पूर्णांक हों, तो $f(x)$ एक पूर्णांक होगा जब x एक पूर्णांक हो।
15. फलन $f(x) = e^{\cos^{-1}\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)}$, $g(x) = \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{4 - 2\cos x}{3}\right)$ दिए गए हैं तथा $h(x) = f(x)$ केवल x के उन मानों के लिए परिभाषित है जो फलन $f(x)$ एवं $g(x)$ के प्रान्त का सर्वनिष्ठ हो। फलन $h(x)$ का परिसर ज्ञात कीजिए।
16. माना कि $f(x)$ अन्तराल $[-2, 2]$ में परिभाषित है और $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 \leq x < 0 \\ x-1, & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$ एवं $g(x) = f(|x|) + |f(x)|$ हो, तो $g(x)$ ज्ञात कीजिए।

Exercise -3

3-A (स्तम्भ मिलान)

- | 1. | स्तम्भ I | स्तम्भ II |
|-----|---|--------------------|
| (A) | निम्न फलन का आवर्तकाल
$y = \sin(2\pi t + \pi/3) + 2\sin(3\pi t + \pi/4) + 3\sin 5\pi t$ | (p) 1/2 |
| (B) | $x \in (0, a)$ के लिए $y - \{\sin(\pi x)\}$ एक बहुएकी फलन है, जहाँ a का मान हो सकता है— | (q) 8 |
| (C) | निम्न फलन का मूलभूत आवर्तकाल $y - \frac{1}{2} \left(\frac{ \sin(\pi/4)x }{\cos(\pi/4)x} + \frac{\sin(\pi/4)x}{ \cos(\pi/4)x } \right)$ | (r) 2 |
| (D) | यदि $f: [0, 2] \rightarrow [0, 2]$ एक एकैकी आच्छादक फलन है जो $f(x) = ax^2 + x + c$ से परिभाषित है, जहाँ a, b, c शून्य वास्तविक संख्याएं हैं, तो $f(2) =$ | (s) 0 |
| 2. | माना कि $f(x) = \sin^{-1} x, g(x) = \cos^{-1} x$ और $h(x) = \tan^{-1} x$, तब x के किन मानों के लिए निम्न अंतराल सत्य हैं— | |
| | स्तम्भ I | स्तम्भ II |
| (A) | $f(\sqrt{x}) + g(\sqrt{x} - \pi/2)$ | (p) $[0, \infty)$ |
| (B) | $f(x) + g(\sqrt{1-x^2}) = 0$ | (q) $[0, 1]$ |
| (C) | $g\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2h(x)$ | (r) $(-\infty, 1)$ |
| (D) | $h(x) + h(1) = h\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ | (s) $[-1, 0]$ |

3-B (कथन/कारण)

3. कथन -1 यदि $f(x)$ एवं $g(x)$ दोनों एकैकी हो, तो $f(g(x))$ एकैकी होता है।
 कथन-2 यदि $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ हो तो $f(x)$ एकैकी है।
 (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है, कथन-2 कथन-1 की सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है, कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।
4. कथन-1 माना $f: [0,3] \rightarrow [1,13], f(x) = x^2 + x + 1$ से परिभाषित है तब प्रतिलोम होगा $f^{-1}(x) = \frac{-1 + \sqrt{4x-3}}{2}$
 कथन -2 बहुएकी फलन प्रतिलोमिय नहीं होता है।
 (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है, कथन-2 कथन-1 की सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है, कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

3-C (अनुच्छेद)

5. अनुच्छेद माना कि $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + ax + b \forall x \in \mathbb{R}$
- 5.1 $f(x)$ के एकैकी फलन होने के लिए a का न्यूनतम मान है—
 (A) $\frac{1}{4}$ (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{8}$
- 5.2 यदि $a = -1$ हो, तो $f(x)$ है—
 (A) एकैकी आच्छादक (B) बहुएकैकी और आच्छादक
 (C) एकैकी और अन्तर्क्षेपी (D) बहुएकैकी और अन्तर्क्षेपी
- 5.3 $f(x)$ प्रतिलोमीय है, यदि और केवल यदि—
 (A) $a \in \left[\frac{1}{4}, \infty\right), b \in \mathbb{R}$ (B) $a \in \left[\frac{1}{8}, \infty\right), b \in \mathbb{R}$ (C) $a \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right], b \in \mathbb{R}$ (D) $a \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right], b \in \mathbb{R}$
6. अनुच्छेद
 मूलभूत आवर्तकाल p का एक फलन $f_1(x) = e^{\tan\left[\frac{x}{4}\right]} + \cos\pi\left(\frac{1-2[x]}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi[x]}{2}\right)$ दिया गया है। (जहाँ $\{.\}$ और $[.]$ क्रमशः भिन्नात्मक भाग फलन तथा महत्तम पूर्णांक फलन को बताते हैं।) तथा $y = \sqrt{2p + \frac{p}{2}[x] - [x]^2}$ है एवं y का प्रान्त $[p, r]$ है। एक दूसरा फलन $f_2(x) = \begin{cases} 2+x, x \geq 0 \\ 2-x, x < 0 \end{cases}$ हो, तो दी गई सूचना के आधार पर निम्न के उत्तर दीजिए।
- 6.1 $f_1(x)$ का आवर्तकाल p है—
 (A) एक अपरिमेय संख्या (B) अभाज्य संख्या
 (C) एक संयुक्त संख्या (D) न तो अभाज्य न ही संयुक्त संख्या
- 6.2 $r - q - 1$ का मान है—
 (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9
- 6.3 p, q, r के पदों में $f_2(f_2(x))$ का परिसर है—
 (A) $[p, \infty)$ (B) (q, ∞) (C) $[r, \infty)$ (D) $(-\infty, -r) \cup (p, \infty)$

3-D (सत्य/असत्य कथन)

7. यदि S सभी त्रिभुजों का समुच्चय है तथा $f: S \rightarrow \mathbb{R}^+, f(\Delta) = \Delta$ का क्षेत्रफल हो, तो f बहुएकी अन्तर्क्षेपी फलन है।
8. $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}[x]\right)$ का मूलभूत आवर्तकाल 4 है, (जहाँ $[.]$ महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है।)
9. $f(x) = x^3 + \tan x$ आच्छादक फलन है।

10. $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$ एकैकी फलन है।
 11. यदि $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ इस प्रकार है कि $f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{7x^2 - 4x + 4}$ तो $f(x)$ बहुएकैकी है।

3-E (रिक्त स्थान की पूर्ति)

12. फलन $f(x) = \left(\log_2 \frac{x^2}{2}\right)$ का प्रान्त ----- है।
 13. यदि $f(x) = \sin \ln \left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{1-x}\right)$ हो, तो $f(x)$ का प्रान्त----- है एवं परिसर ---- है।
 14. $f(x+y) = f(y) \forall x, y \in \mathbb{R}$ को संतुष्ट करने वाला $y = f(x)$ ----- के सापेक्ष अवश्य सम्मित है।
 15. $e^{\cos^4 \pi x + x - [x] + \cos \pi x}$ का मूलभूत आवर्तकाल ----- है। (जहाँ [] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है।)

Exercise -4

4-A (पूर्ववर्ती JEE परीक्षा प्रश्न)

IIT-JEE-2007

1. माना कि $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 5x + 6}$

कॉलम Column - I में दिये गये प्रकथन/व्यंजकों को कॉलम-II में दिये गये प्रकथन/व्यंजकों से सुमेल करायें। अपना उत्तर ORS में दिया गया 4 x 4 मैट्रिक्स के उचित बुल्लों (bubbles) को काला करके दर्शाएँ।

कॉलम I

- (A) यदि $-1 < x < 1$, तब $f(x)$ संतुष्ट करता है।
 (B) यदि $1 < x < 2$, तब $f(x)$ संतुष्ट करता है।
 (C) यदि $3 < x < 5$, तब $f(x)$ संतुष्ट करता है।
 (D) यदि $x > 5$, तब $f(x)$ संतुष्ट करता है।

कॉलम II

- (p) $0 < f(x) < 1$
 (q) $f(x) < 0$
 (r) $f(x) > 0$
 (s) $f(x) < 1$

IIT-JEE -2005

2. यदि फलन $f(x)$ एवं $g(x)$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ पर इस प्रकार परिभाषित है ताकि $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \text{परिमिय एवं} \\ x, & x \in \text{अपरिमिय} \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \text{परिमिय} \\ x, & x \in \text{अपरिमिय} \end{cases}$ तो $(f-g)(x)$ है-

- (A) एकैकी एवं आच्छादक (B) न तो एकैकी न ही आच्छादक
 (C) एकैकी लेकिन आच्छादक नहीं (D) आच्छादक लेकिन एकैकी नहीं

3. X एवं Y दो समुच्चय है एवं $f: X \rightarrow Y$. यदि $\{f(x) = y; c \in X, y \in Y\}$ एवं $\{f^{-1}(d) = x; d \in Y, x \in X\}$ तो सत्य कथन है-
- (A) $f(f^{-1}(b)) = b$ (B) $f^{-1}(f(b)) = a$ (C) $f(f^{-1}(b)) = b, b \in Y$ (D) $f^{-1}(f(a)) = a, a \in X$

IIT-JEE-2004

4. यदि $f(x) = \sin x + \cos x$ एवं $f(x) = x^2 - 1$. हो तथा $g[f(x)]$ प्रतिलोमीय है तो 'x' का मान है-

- (A) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (B) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ (C) $\left[0 - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ (D) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

IIT - JEE-2003

5. यदि $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ एवं $f(x) = \frac{x}{1+x}$ हो तो, f

- (A) एकैकी और आच्छादक है (B) एकैकी लेकिन आच्छादक है
 (C) आच्छादक लेकिन एकैकी नहीं है। (D) न तो एकैकी न ही आच्छादक है

6. फलन $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 + x + 1}; x \in \mathbb{R}$ का परिसर है—(A) $(1, \infty)$ (B) $\left(1, \frac{11}{7}\right]$ (C) $\left(1, \frac{7}{3}\right]$ (D) $\left(1, \frac{7}{5}\right]$

7. फलन $f(x) = \sqrt{\sin^{-1}(2x) + \frac{\pi}{6}}$ का 'x' के वास्तविक मानों के लिए प्रान्त है—

(A) $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ (B) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (C) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{9}\right)$ (D) $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$

IIT- JEE- 2002

8. माना $x \geq -1$ के लिए $f(x) = (x + 1)^2$, यदि फलन $g(x)$ का आरेख रेखा $y = x$ के सापेक्ष फलन $f(x)$ के आरेख का परावर्तन है तो $g(x) =$

(A) $-\sqrt{x} - 1, x \geq 0$ (B) $\frac{1}{(x+1)^2}, x > -1$ (C) $\sqrt{x+1}, x > -1$ (D) $\sqrt{x} - 1, x \geq 0$

9. माना फलन $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ में $f(x) = 2x + \sin x, x \in \mathbb{R}$ के लिए परिभाषित है। तो f

(A) एकैकी एवं आच्छादक है (B) एकैकी लेकिन आच्छादक नहीं है।
 (C) आच्छादक लेकिन एकैकी नहीं है। (D) न तो एकैकी न ही आच्छादक है

IIT-JEE-2001

10. माना $g(x) = 1 + x - [x]$ एवं $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ हो तो x के लिए, $f(g(x)) =$

(A) x (B) 1 (C) $f(x)$ (D) $g(x)$

11. यदि $f: [1, \infty) \rightarrow [2, \infty)$ $f(x) = x + \frac{1}{x}$ द्वारा परिभाषित हो तो $f^{-1}(x) =$

(A) $\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}$ (B) $\frac{x}{1 + x^2}$ (C) $\frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}$ (D) $1 - \sqrt{x^2 - 4}$

12. फलन $f(x) = \frac{\log_2(x+3)}{x^2 + 3x + 2}$ का प्रान्त है—

(A) $\mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$ (B) $(-2, \infty)$ (C) $\mathbb{R} \setminus \{-1, -2, -3\}$ (D) $(-3, \infty) \setminus \{-1, -2\}$

13. यदि $E = \{1, 2, 3, 4\}$ एवं $F = \{1, 2\}$ हो, तो E से F में परिभाषित आच्छादक फलनों की संख्या है—

(A) 14 (B) 16 (C) 12 (D) 8

14. माना $f(x) = \frac{\alpha x}{x+1}, x \neq -1$ है तो $f(f(x)) = x$ के लिए α का मान है—

(A) $\sqrt{2}$ (B) $-\sqrt{2}$ (C) 1 (D) -1

IIT-JEE-2000

15. समीकरण $2^x + 2^y = 2$ द्वारा दिये जाने वाले फलन $y(x)$ का प्रान्त है—

(A) $0 < x \leq 1$ (B) $0 \leq x \leq 1$ (C) $-\infty < x \leq 0$ (D) $-\infty < x < 1$

IIT - JEE- 1999

16. यदि फलन $f: [1, \infty) \rightarrow [1, \infty), f(x) = 2^{x(x-1)}$ द्वारा परिभाषित हो तो $f^{-1}(x) =$

(A) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x(x-1)}$ (B) $\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \log_2 x}\right)$ (C) $\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 + 4 \log_2 x}\right)$ (D) परिभाषित नहीं

IIT-JEE-1998

17. यदि $g(f(x)) = |\sin x|$ एवं $g(g(x)) = (\sin \sqrt{x})^2$ हो, तो

(A) $f(x) = \sin^2 x, g(x) = \sqrt{x}$ (B) $f(x) = \sin x, g(x) = |x|$
 (C) $f(x) = x^2, g(x) = \sin \sqrt{x}$ (D) f एवं g निर्धारित नहीं किए जा सकते हैं

18. यदि $f(x) = 3x - 5$, हो तो $f^{-1}(x) :$

- (A) $\frac{1}{3x-5}$ द्वारा दिया जाता है। (B) $\frac{x+5}{3}$ द्वारा दिया जाता है।
 (C) विद्यमान नहीं है क्योंकि f एकैकी नहीं है। (D) विद्यमान नहीं है क्योंकि f आच्छादक नहीं है।

IIT-JEE-1997

19. समीकरण $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{4x-1}$ रखता है—
 (A) कोई हल नहीं (B) एक हल (C) दो हल (D) दो से ज्यादा

IIT-JEE-1996

20. रिक्त स्थान की पूर्ति करो।
 (i) यदि f अन्तराल $(-5, 5)$ में परिभाषित सम फलन है तथा x के 4 मान समीकरण $f(x)f\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$ को संतुष्ट करते हैं, तो यह मान ----- एवं -----
 (ii) यदि $f(x) = \sin^2 x + \sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ एवं $g\left(\frac{5}{4}\right) = 1$ हो तो $(g \circ f)(x) = \text{-----}$
 21. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ में परिभाषित फलन $f(x) = \frac{\alpha x^2 + 6x - 8}{\alpha + 6x - 8x^2}$ जहाँ \mathbb{R} वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है, तब α के मानों का अन्तराल ज्ञात कीजिए। जिसके लिए f आच्छादक है। क्या $\alpha = 3$ के लिए फलन एकैकी है?

IIT-JEE-1995

22. यदि $f(x) = (x+1)^2 - 1$, $x \geq -1$ हो, तो समुच्चय $S = \{x : f(x) = f^{-1}(x)\}$ है यदि f आच्छादक हो—
 (A) $\left\{0, -1, \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\right\}$ (B) $\{0, 1, -1\}$
 (C) $\{0, -1\}$ (D) रिक्त समुच्चय

IIT-JEE-1994

23. माना $f(x) = \sin x$ एवं $g(x) = |\ln x|$, यदि संयुक्त फलन $f \circ g(x)$ एवं $g \circ f(x)$ परिभाषित हो तथा इनके परिसर क्रमशः R_1 एवं R_2 हो तो
 (A) $R_1 = \{u : -1 < u < 1\}$ $R_2 = \{v : 0 < v < \infty\}$
 (B) $R_1 = \{u : -\infty < u \leq 0\}$ $R_2 = \{v : -1 \leq v \leq 1\}$
 (C) $R_1 = \{u : 0 \leq u < \infty\}$ $R_2 = \{v : -1 < u < 1; v \neq 0\}$
 (D) $R_1 = \{u : -1 \leq u \leq 1\}$ $R_2 = \{u : 0 \leq v < \infty\}$

4-A (पूर्ववर्ती AIEEE/DCE परीक्षा प्रश्न)

24. $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ में उपस्थित अधिकतम अन्तराल जिसके लिए फलन $[f(x) = 4^{-x^2} + \cos^{-1}\left(\frac{x}{2} - 1\right) + \log(\cos x)]$ परिभाषित है—
 (A) $[0, \pi]$ (B) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (C) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ (D) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$
 25. $f : (-11) \rightarrow B$ में परिभाषित फलन $f(x) = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$ एकैकी एवं आच्छादक दोनों हो, तो B अन्तराल में उपस्थित है—
 (A) $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (B) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (C) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ (D) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$
 26. वास्तविक मान फलन $f(x)$ समीकरण $f(x-y) = f(x)f(y) - f(a-x)f(a+y)$ को संतुष्ट करता है जहाँ a एक अचर संख्या एवं $f(0) = 1$ है, तब $f(2a-x) =$ (A) $f(-x)$ (B) $f(a) + f(a-x)$ (C) $f(x)$ (D) $-f(x)$
 27. यदि $R = \{(1,3), (4,2), (2,4), (2,3), (3,1)\}$ समुच्चय $A = \{1,2,3,4\}$ में एक सम्बन्ध हो, तो सम्बन्ध R है—
 (A) फलन (B) संक्रामक (C) सममित नहीं (D) reflexive
 28. यदि $f : \mathbb{R} \rightarrow S$ में परिभाषित फलन $f(x) = \sin - \sqrt{3} \cos x + 1$ आच्छादक हो, तो S का अन्तराल है—
 (A) $[0,3]$ (B) $[-11]$ (C) $[0,1]$ (D) $[-1,3]$

29. यदि $y=f(x)$ का ग्राफ रेखा $x=2$ के सापेक्ष सममित हो, तो—
 (A) $f(x+2) = f(x-2)$ (B) $f(2+x) = f(2-x)$ (C) $f(x) = f(-x)$ (D) $f(x) = -f(-x)$
30. फलन $f(x) = \frac{\sin^{-1}(x-3)}{\sqrt{9-x^2}}$ का प्रान्त है— (A) $[2, 3]$ (B) $[2, 3]$ (C) $[1, 2]$ (D) $[1, 2]$
31. फलन $f(x) = {}^{7-x}P_{x-3}$ का परिसर है
 (A) $\{1,2,3\}$ (B) $\{1,2,3,4,5,6\}$ (C) $\{1,2,3,4\}$ (D) $\{1,2,3,4,5\}$
32. एक फलन f प्राकृत संख्याओं के समुच्चय से पूर्णाकों के समुच्चय $f(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & \text{जहाँ } n \text{ विषम है} \\ \frac{n}{2} & \text{जहाँ } n \text{ सम है} \end{cases}$ में इस प्रकार है कि —
 (A) एकैकी लेकिन आच्छादक नहीं है। (B) आच्छादक लेकिन एकैकी नहीं
 (C) एकैकी—आच्छादक दोनों (D) न एकैकी न आच्छादक
33. यदि $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ को संतुष्ट करता है एवं $f(1) = 7$ हो तो $\sum_{r=1}^n f(r)$ है—
 (A) $\frac{7n}{2}$ (B) $\frac{7(n+1)}{2}$ (C) $7n(n+1)$ (D) $\frac{7n(n+1)}{2}$
34. फलन $f(x) = \frac{3}{4-x^2} + \log_{10}(x^3 - x)$ का प्रान्त है—
 (A) $(1, 2)$ (B) $(-1,0) \cup (1,2)$ (C) $(1,2) \cup (2,\infty)$ (D) $(-1,0) \cup (1,2) \cup (2,\infty)$
35. फलन $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1})$ है—
 (A) सम फलन (B) विषम फलन (C) आवर्ती फलन (D) न सम न विषम
36. यदि $f(x) = \frac{1}{x^2}$ हो, तो फलन है—
 (A) x एवं y अक्ष के सापेक्ष सममित (B) x - अक्ष के सापेक्ष सममित
 (C) y के अक्ष के सापेक्ष सममित (D) इनमें से कोई नहीं
37. अन्तराल $\left[2\pi k - \frac{\pi}{2}, 2\pi k + \frac{\pi}{2}\right]$ में उपसिमत पूर्णांक k के लिए $\sin x$ का ग्राफ है—
 (A) 0 से 1 में हासमान (B) -1 से 1 में वर्धमान
 (C) -1 से 0 में हासमान (D) इनमें से कोई नहीं
38. यदि $f(-x) = -f(x)$ हो, तो $f(x)$ है।
 (A) न सम न विषम (B) विषम फलन (C) सम फलन (D) आवर्ती फलन
39. यदि $f(x) = 2x^6 + 3x^4 + 4x^2$ हो, तो $f'(x)$ है—
 (A) सम फलन (B) विषम फलन (C) सम फलन (D) इनमें से कोई नहीं
40. यदि $A = \{1,2,3\}$ $B = \{a,b\}$ एवं f, A से B में प्रतिचित्रण हो, तो $A \times B$ है।
 (A) $\{(a,1), (3,b)\}$
 (B) $\{(a,2), (4,b)\}$
 (C) $\{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b), (4,a), (4,b)\}$
 (D) इनमें से कोई नहीं
41. फलन $f(x) = x - [x]$ है जहाँ $[]$ महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है—
 (A) अचर फलन (B) आवर्ती जिसका आवर्तकाल $1/2$ है
 (C) आवर्ती जिसका आवर्तकाल 1 है। (D) आवर्ती फलन
42. यदि $g(x) = 1 + x - [x]$ एवं $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x < 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \\ 1 & \text{if } x > 0 \end{cases}$ हो तो $\forall x, \text{gof}(x) =$
 (A) x (B) 1 (C) $f(x)$ (D) $g(x)$

43. यदि $g: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ जहाँ $g(x) = x^2 + \tan x + \left[\frac{x^2 + 1}{p} \right]$ एक विषम फलन हो, तो प्राचल P का मान है—
 (A) $-5 < P < 5$ (B) $P < 5$ (C) $P > 5$ (D) इनमें से कोई नहीं
44. यदि $g[f(x)] = |\sin x|$ एवं $f[g(x)] = (\sin \sqrt{x})^2$ हो, तो
 (A) $f(x) = \sin^2 x, g(x) = \sqrt{x}$ (B) $f(x) = \sin x, g(x) = |x|$
 (C) $f(x) = x^2, g(x) = \sin \sqrt{x}$ (D) f एवं g ज्ञात नहीं किये जा सकते हैं।
45. फलन $f(x) = \sin(xe^{|x|} + x^2 - x) \forall x \in (-1, \infty)$ का परिसर है, जहाँ [x] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है।
 (A) ϕ (B) $[0, 1]$ (C) $[-1, 1]$ (D) R
46. यदि $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$ हो, तो $f(x) + f(1-x)$ है।
 (A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) इनमें से कोई नहीं
47. यदि $f(x+y) = f(x)f(y) \forall x$ एवं $y, f(5) = 2$ और $f'(0) = 3$ हो, तो $f'(5) =$
 (A) 6 (B) 7 (C) 4 (D) 8

Answers

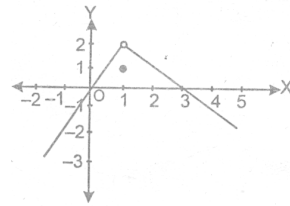
EXERCISE # 1-A

1. D 2. D 3. A 4. A 5. D 6. C 7. A
 8. B 9. B 10. B 11. C 12. A 13. B 14. D
 15. A 16. B 17. B 18. C 19. D 20. A 21. A
 22. D 23. D 24. C 25. B 26. C 27. BCD
 28. AC 29. A 30. BD 31. AD 32. ABC
 33. ABD 34. BCD 35. ABC

5.

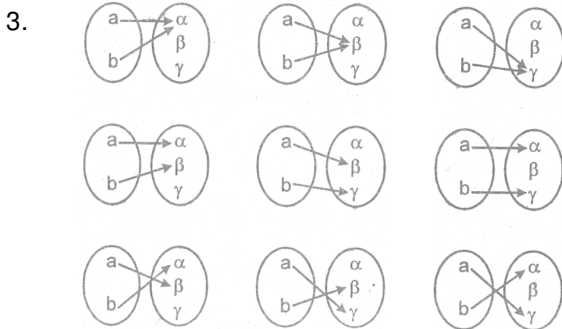
- (i) (ii)

(iii)

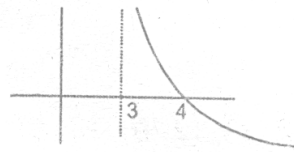


EXERCISE # 1-B

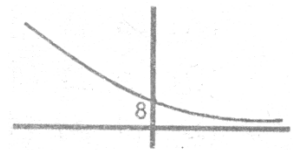
2. No



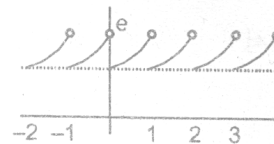
(iv)



(v)



(vi)



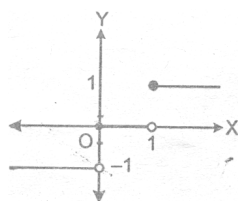
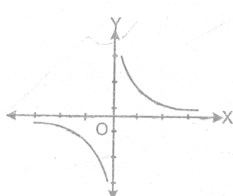
4. (i) $[-1, 1] - \{0\}$ (ii) $(0, \infty)$ (iii) R

(iv) $[-2, \infty) \cup (0, 1)$ (v) $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$

(vi) $\left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right)$

6. (i) $[0, \infty)$ (ii) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (iii) $[0, 4]$ (iv) $\{-1, 1\}$

7. (i) प्रान्त : R, परिसर $\frac{1}{\sqrt{7}} \leq y \leq 1$



(ii) प्रान्त : $N \cup \{0\}$, परिसर : $\{n! : n = 0, 1, 2, \dots\}$

(iii) प्रान्त : $R - \{3\}$ परिसर : $R - \{6\}$

(iv) प्रान्त : R परिसर : $\{1\}$

$$f(x) \begin{cases} -x^2 - \sin x - 1 < x \leq 0 \\ x - e^x & x \leq -1 \end{cases}$$

8. (i) $[0, 10]$ (ii) $(0, 1]$ (iii) $(-\infty, \ell n \pi / 2]$

(iv) $(-\infty, \frac{49}{20}]$ (v) $[-4, 3]$ (vi) $[-1, 1]$

9. (i) No (ii) Yes (iii) No (iv) No

10. $(2, \infty)$ 12. $[fo(goh)](x) = [(fog)oh](x) = \sin^2 \sqrt{x}$

13 (i) $fog = x, > 0; gof = s, s \in R$ (ii) $|\sin x|, \sin|x|$
 (iii) $\sin^{-1}(x^2), (\sin^{-1} x)^2$ (iv) $\frac{3x^2 - 4x + 2}{(x-1)^2}, \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$

14. $f(g)(x) = \begin{cases} 2 - 2x + x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & -1 \leq x < 0 \end{cases}$

15. (i) बहुऐकी (ii) एकैकी (iii) एकैकी (iv) बहुऐकी

(v) एकैकी (vi) बहुऐकी (vii) एकैकी

16. (i) अन्तर्क्षेपी (ii) आच्छादक (iii) अन्तर्क्षेपी (vi) आच्छादक

17. (i) एकैकी आच्छादक

(ii) न एकैकी न आच्छादक

(iii) न एकैकी न आच्छादक

(vi) आच्छादक लेकिन एकैकी नहीं

18. (i) No (ii) Yes (iii) Yes (iv) No

19. (i) विषम (ii) सम (iii) सम

(vi) न सम न विषम (v) विषम (vi) सम

(vii) विषम (viii) न सम न विषम (ix) सम

$$\begin{cases} x^2 - \sin x - 1 < x \leq 0 \\ -x + e^x & x \leq -1 \end{cases}$$

22. (i) 2π (ii) 2π (iii) 24 (iv) 70π (v) $\frac{2\pi}{3}$
 (vi) $\pi/6$ (vii) $\pi/6$ (viii) 2π

23. (i) f^{-1} विद्यमान नहीं है।

(ii) $f^{-1}; R \rightarrow R; f^{-1} = 7 + (4 - x^5)^{1/3}$

(iii) $f^{-1}; R \rightarrow R; f^{-1} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

24. $f^{-1}; R \rightarrow R; f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

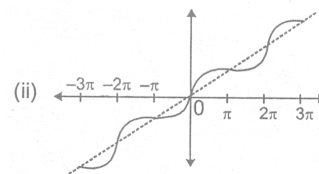
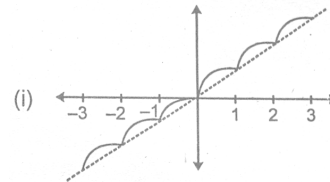
25. $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ 26. $\frac{x+1}{x-1}$ 27. 2046

EXERCISE # 2-A

1. D 2. D 3. D 4. D 5. C 6. D 7. D
 8. C 9. A 10. C 11. A 12. C 13. C 14. B
 15. D 16. C 17. A 18. B 19. C 20. BC 21. B
 22. ABCD 23. AB 24. BCD 25. AD 26. AC

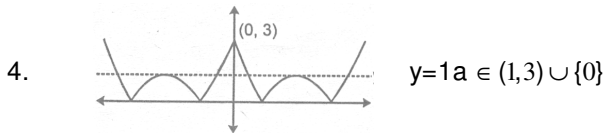
EXERCISE # 2-B

1. (i) $[0, 1]$ (ii) $[-1, 1]$ (iii) R
 (iv) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{4} \right]$ (v) $(0, 0] \cup [4, 5)$



3. (i) \mathbb{R}^+ (ii) $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ (iii) $\left[0, \frac{3}{\sqrt{2}}\right]$

(iv) $[-11, 16]$ (v) $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$



5.
$$f \circ g(x) = \begin{cases} -(1+x) & , -1 \leq x \leq 0 \\ x-1 & , 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$g \circ f(x) = \begin{cases} x+1 & , 0 \leq x < 1 \\ 3-x & , 1 \leq x \leq 2 \\ x-1 & , 2 < x \leq 3 \\ 5-x & , 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

$$f \circ f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 4-x & , 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$g \circ g(x) = \begin{cases} -x & , -1 \leq x \leq 0 \\ x & , 0 < x \leq 2 \\ 4-x & , 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

6. प्रान्त: [1, 2]; परिसर: $[\ln 2, \ln 4]$
 7. (2, 14) $\alpha = 3$ के लिए, फलन एकैकी नहीं है।
 8. (i) न सम न विषम (ii) सम (iii) विषम
 (iv) सम (v) विषम
 9. (i) π (ii) 2 (iii) $\frac{2\pi}{3}$ (iv) 2π (v) $2^n\pi$ (vi) π
 10. Period 2a 11. $f^{-1}(x) = x + (-1)^x$, $x \in \mathbb{N}$
 12. $f^{-1}(1) = y$ 13. 3

15. $[e^{\frac{\pi}{6}}, e^\pi]$ 16. $g(x) = \begin{cases} -x & , -2 \leq x < 0 \\ 0 & , 0 \leq x \leq 1 \\ 2(x-1) & , 1 < x \leq 2 \end{cases}$

EXERCISE # 3

1. (A) $\rightarrow (q,r)$ (B) $\rightarrow (q,r)$ (C) $\rightarrow (q),(D) \rightarrow (s)$
 2. (A) $\rightarrow (q)$, (B) $\rightarrow (s)$, (C) $\rightarrow (p)$, (D) $\rightarrow (r)$,
 3. A 4. B 5.1 A 5.2 B 5.3 A 6.1 C 6.2 A
 6.3 A 7. असत्य 8. सत्य 9. सत्य 11. सत्य

12. $[-2, -1] \cup [1, 2]$ 13. (-2, 1), [-1, 1] 14. origin

15. 2

EXERCISE # 4

1. (A) $\rightarrow (p,r,s)$, (B) $\rightarrow (q,s)$, (C) $\rightarrow (q,s)$, (D) $\rightarrow (p,r,s)$

2. A 3. A 4. C 5. B 6. C 7. A 8. B

9. A 10. B 11. A 12. D 13. A 14. D 15. D

16. B 17. A 18. B 19. A

20. (i) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ (ii) 1

21. [2,14]; for $\alpha = 3$, f is not one-one

22. C 23. D 24. D 25. A 26. D 27. C 28. D

29. B 30. B 31. A 32. C 33. D 34. D 35. B

36. C 37. B 38. B 39. B 40. C 41. C 42. B

43. C 44. A 45. C 46. B 47. A

MQB

EXERCISE # 1 (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. फलन $f(x) = \sqrt{-\log_{x+4} \left(\log_2 \frac{2x-1}{3+x} \right)}$ का प्रान्त है—

- (A) $(-4, -3) \cup (4, \infty)$ (B) $(-\infty, -3) \cup (4, \infty)$
 (C) $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$ (D) इनमें से कोई नहीं

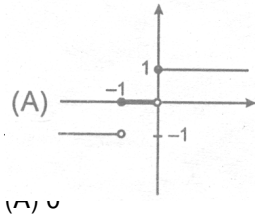
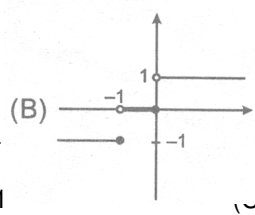
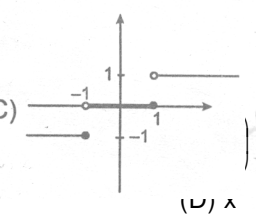
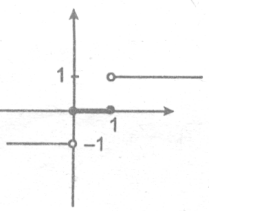
2. फलन $\sqrt{\log_{1/3} \log_4 ([x]^2 - 5)}$ का प्रान्त है— (जहाँ [x] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है।)

- (A) $[-3, -2) \cup [3, 4)$ (B) $[-3, -2) \cup (2, 3]$ (C) $\mathbb{R} - [-2, 3]$ (D) $\mathbb{R} - [-3, 3]$

3. फलन $f(x) = 4x^3 - 12x$ द्वारा परिभाषित प्रतिचित्रण के अन्तर्गत अनतराल $[-1, 3]$ का प्रतिबिम्ब है—

- (A) $[f(+1), f(-1)]$ (B) $[f(-1), f(3)]$ (C) $[-8, 16]$ (D) $[-8, 72]$

फलन $f(x) = \begin{vmatrix} \cos \frac{x}{2} & 1 & 1 \\ 1 & \cos \frac{x}{2} & -\cos \frac{x}{2} \\ -\cos \frac{x}{2} & 1 & -1 \end{vmatrix}$ का परिसर है—

- (A) [0, 2] (B) [0, 4] (C) [2, 4] (D) [1, 3]
5. समीकरण $[\sin^{-1} x] = x - [x]$ के हलों की संख्या है— (जहाँ $[.]$ महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है।)
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) अनन्त
6. योगफल $\left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2000}\right] + \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{2000}\right] + \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2000}\right] + \dots + \left[\frac{1}{2} + \frac{1999}{2000}\right]$ का मान है—
 (जहाँ $[.]$ महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है।)
- (A) 1000 (B) 999 (C) 1001 (D) इनमें से कोई नहीं
7. एक वर्ग ABCD की भुजा $AB=2$ है, वर्ग की आसन्न भुजाओं पर दो बिन्दु m एवं N इस प्रकार है कि MN विकर्ण BD के समान्तर है। यदि MN की शीर्ष A से दूरी x है तथा $f(x)=$ क्षेत्रफल (ΔAMN) हो, तो $f(x)$ का परिसर है—
- (A) $(0, \sqrt{2}]$ (B) $(0, 2]$ (C) $(0, 2\sqrt{2}]$ (D) $(0, 2\sqrt{3}]$
8. निम्न में से कौनसा फलन $f(x) = \sin(\pi x + 1)$ का ग्राफ है—
- (A)  (B)  (C)  (D) 
9. माना कि $f(x) = \cos(x + \dots)$
- (A) $(1, +\infty)$ (B) $(-\infty, -1)$ (C) $(-1, 1)$ (D) $(-\infty, \infty)$
10. माना कि एक वास्तविक मान फलन f इस प्रकार परिभाषित है कि $f(x) = \frac{e^x - e^{-|x|}}{e^x + e^{|x|}}$ का परिसर है—
- (A) R (B) [0, 1] (C) [0, 1) (D) $\left[0, \frac{1}{2}\right)$
11. यदि $f(x) = 4x^3 - x^2 - 2x + 1$ और $g(x) = \begin{cases} \text{Min}\{f(t) : 0 \leq t \leq x\} & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 3 - x & ; 1 < x \leq 2 \end{cases}$ हो, तो $g\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + g\left(\frac{5}{4}\right)$ का मान है—
- (A) 7/4 (B) 9/4 (C) 13/4 (D) 5/2
12. यदि A, B, C तीन दशमलव संख्याएं हैं। और $p = [A+B+C]$ एवं $q = [A]+[B]+[C]$ हो (जहाँ $[.]$ महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है), तो $p-q$ का अधिकतम मान है—
- (A) 0 (B) 0 (C) 2 (D) 3
13. माना कि $f(x) = ax^2 + bx + c$, जहाँ a, b, c परिमेय है और $f : Z \rightarrow Z$, जहाँ Z पूर्णांक संख्याओं का समुच्चय है, तो $a+b$ है—
- (A) एक ऋणात्मक पूर्णांक (B) एक पूर्णांक
 (C) अपूर्णांक परिमेय संख्या (D) इनमें से कोई नहीं

15. फलन $f(x) = \sin^{-1}\left[x^2 + \frac{1}{2}\right] + \cos^{-1}\left[x^2 - \frac{1}{2}\right]$ का परिसर है- (जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है।)

- (A) $\left\{\frac{\pi}{2}, \pi\right\}$ (B) $\left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$ (C) $\{\pi\}$ (D) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

16. $[-1,1] \rightarrow [-1,1]$ में निम्न में से कौन सा फलन एकैकी आच्छादक है?

- (A) $f(x) = x + |x|$ (B) $f(x) = x|x|$ (C) $f(x) = x + 1$ (D) $f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$

17. $f(x) = 6^x + 6^{|x|}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ है-

- (A) एकैकी आच्छादक (B) बहुएकी आच्छादक (C) एकैकी अन्तर्क्षेपी (D) बहुएकी अन्तर्क्षेपी

18. यदि वास्तविक मान फलन $f(x) = px + \sin x$ एक एकैकी आच्छादक फलन है, तो $p \in \mathbb{R}$ के सम्भावित मानों का समुच्चय है-

- (A) $\mathbb{R} - \{0\}$ (B) \mathbb{R} (C) $(0, \infty)$ (D) इनमें से कोई नहीं

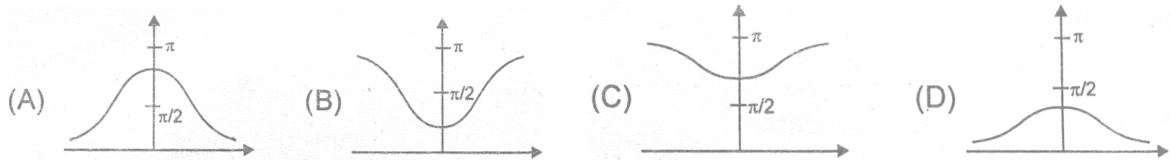
19. माना कि सभी त्रिभुजों का समुच्चय S है तथा धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय \mathbb{R}^+ है, तो फलन $f : S \rightarrow \mathbb{R}^+, f(\Delta) = \Delta$ का क्षेत्रफल जहाँ $\Delta \in S$

- (A) एकैकी लेकिन आच्छादक नहीं (B) आच्छादक लेकिन एकैकी नहीं
 (C) एकैकी आच्छादक (D) न तो एकैकी न ही आच्छादक

20. माना कि \mathbb{R} से \mathbb{R} में परिभाषित एक फलन 'f' इस प्रकार है कि $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$ तो $f(x)$ है-

- (A) एकैकी और अन्तर्क्षेपी (B) एकैकी और आच्छादक (C) बहुएकी और अन्तर्क्षेपी (D) बहुएकी और आच्छादक

21. निम्नलिखित आरेखों में से $f(x) = \cot^{-1}(4 - x^2)$ का सर्वश्रेष्ठ आरेख है-



22. $f(x) = e^{-(x^2 - 3x + 2)}$ द्वारा परिभाषित फलन $f : (-\infty, 1) \rightarrow (0, e^5)$ है-

- (A) बहुएकी और आच्छादक (B) बहुएकी और अन्तर्क्षेपी (C) एकैकी और आच्छादक (D) एकैकी और अन्तर्क्षेपी

23. यदि $f(x) = \frac{\sin^2 x + 4 \sin x + 5}{2 \sin^2 x + 8 \sin x + 8}$ हो, तो $f(x)$ का परिसर है-

- (A) $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ (B) $\left(\frac{5}{9}, 1\right)$ (C) $\left[\frac{5}{9}, 1\right]$ (D) $\left[\frac{5}{9}, \infty\right)$

24. यह दिया गया है कि $f(x)$ एक समफलन है और सम्बन्ध $f(x) = \frac{xf(x^2)}{2 + \tan^2 x \cdot f(x^2)}$ को संतुष्ट करता है, तो $f(10)$ का मान है-

- (A) 10 (B) 100 (C) 50 (D) इनमें से कोई नहीं

25. फलन $g(x) = a|\sin x| + a^2|\cos x| + f(x)$ का आवर्तकाल $\frac{\pi}{2}$ होगा यदि $a =$

- (A) 2 (B) 3 (C) 1 (D) इनमें से कोई नहीं

26. निम्नलिखित में से कौनसा कथन सत्य है—

- (A) $f(x) = \frac{16^x - 1}{4^x}$ एक विषम फलन है।
 (B) $f(x) = \sin|x|$ एक विषम फलन है।
 (C) यदि $\sin x + \cos a x$ आवर्ती है, तो a अपरिमेय है।
 (D) यदि $f_1(x) \cdot f_2(x)$ आवर्ती है, तो इनका योग फलन सदैव आवर्ती होगा।

27. माना $f(x) = x(2-x), 0 \leq x \leq 2$ है। यदि 'f' की परिभाषा को समुच्चय $R-[0, 2]$ के लिए $f(x+2) = f(x)$ द्वारा विस्तारित किया जाए, तो f है—

- (A) आवर्ती फलन जिसका आवर्तकाल 1 है
 (B) अनावर्ती फलन
 (C) आवर्ती फलन जिसका आवर्तकाल 2 है
 (D) आवर्ती फलन जिसका आवर्तकाल 1/2 है

28. माना कि $f: [0,1] \rightarrow [1,2]$ में $f(x) = 1 + x$ द्वारा परिभाषित है तथा $g: [1,2] \rightarrow [0,1]$ में $g(x) = 2 - x$ द्वारा परिभाषित है, तो संयुक्त फलन $g \circ f$ है—

- (A) एकैकी आच्छादक
 (B) आच्छादक लेकिन एकैकी नहीं
 (C) एकैकी लेकिन आच्छादक नहीं
 (D) न तो एकैकी न ही आच्छादक

29. माना कि f और g दो फलन है जो $R \rightarrow R$ में निम्न प्रकार परिभाषित है—

$$f(x) = \frac{x+|x|}{2} \text{ और } g(x) = \begin{cases} x & \text{for } x < 0 \\ x^2 & \text{for } x \geq 0 \end{cases} \text{ हो, तो—}$$

- (A) $f \circ g$ परिभाषित है लेकिन $g \circ f$ नहीं
 (B) $g \circ f$ परिभाषित है लेकिन $f \circ g$ नहीं
 (C) $g \circ f$ एवं $f \circ g$ दोनों ही परिभाषित है लेकिन वे असमान है।
 (D) $g \circ f$ एवं $f \circ g$ दोनों ही परिभाषित है और वे समान है।

30. a,b,c,d पर किस प्रतिबन्ध के लिए फलन $f(x) = \frac{a+bx}{c+dx}$ स्वयं का प्रतिलोम है ?

- (A) $ac = bd$ (B) $b = -c$ (C) $b = 0$ (D) $b^2 = c^2$

31. यदि $q^2 - 4pr = 0, p > 0$ हो, तो फलन $f(x) = \log(px^2 + (p+q)x^2 + (q+r)x + r)$ का प्रान्त है—

- (A) $R - \left\{ -\frac{q}{2p} \right\}$ (B) $R - \left[(-\infty, -1] \cup \left\{ -\frac{q}{2p} \right\} \right]$
 (C) $R - \left[(-\infty, -1) \cap \left\{ -\frac{q}{2p} \right\} \right]$ (D) इनमें से कोई नहीं

32. फलन $f(x) = (\sin^{-1} x)^3 + (\cos^{-1} x)^3$ का महत्तम मान है—

- (A) $\frac{\pi^3}{32}$ (B) $\frac{\pi^3}{8}$ (C) $\frac{3\pi^3}{8}$ (D) $\frac{7\pi^3}{8}$

33. यदि $[2 \cos x] + [\sin x] = -3$, हो तो फलन $f(x) = \sin + \sqrt{3} \cos x$ का $[0, 2\pi]$ में परिसर है—
 (जहाँ [] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है।)

- (A) $[-2, -1]$ (B) $(-2, -1]$ (C) $(-2, -1)$ (D) $[-2, -\sqrt{3}]$

34. समीकरण $[x] + 2\{-x\} = 3x$, के हलों की संख्या है (जहाँ [] महत्तम पूर्णांक को प्रदर्शित करता है तथा $\{x\}$, x के भिन्नात्मक भाग को प्रदर्शित करता है)

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

 एक से अधिक विकल्प सही

35. अनंतराल $[0, 1]$ पर $f(x)$ इस प्रकार परिभाषित है कि $f(x) = \begin{cases} x & \text{यदि } x \in Q \\ 1-x & \text{यदि } x \notin Q \end{cases}$ तो सभी $x \in R$ के लिए संयुक्त फलन

$f[f(x)]$ है—

- (A) एक अचर फलन (B) एक तत्समक फलन
 (C) एक विषम रैखिक बहुपत (D) $1+x$

36. यदि $f(x)$ एक विषम फलन हो, तो—

- (A) $\frac{f(-x)+f(x)}{2}$ एक सम फलन हो, तो—
 (B) $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ न तो सम न ही विषम है
 (C) $[f(x)+1]$ सम है, जहाँ $[x]$, x के बराबर या उससे छोटा महत्तम पूर्णांक है
 (D) इनमें से कोई नहीं

37. यदि a के सभी वास्तविक मानों के लिए $x^2 + f(A) \cdot x + a = 0$ का एक मूल दूसरे मूल की तृतीय घात के बराबर हो, तो

- (A) वास्तविक मान फलन 'f' का प्रान्त अऋणात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।
 (B) $f(x) = -x^{1/4}(1+x^{1/2})$
 (C) $f(x) = x^{1/4} + x^{3/4}$
 (D) इनमें से कोई नहीं

38. माना कि $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{tc } x = 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{tc } -1 < x < 1 (x \neq 0) \text{ हो, तो} \\ x|x| & \text{tc } x > 1 \text{ or } x < -1 \end{cases}$

- (A) $f(x)$ एक विषम फलन है (B) $f(x)$ एक सम फलन है
 (C) $f(x)$ न तो विषम न ही सम फलन है (D) $f'(x)$ एक सम फलन है

39. निम्न में से कौन से फलन आवर्ती है ?

- (A) $\text{sgn}(e^{-x})$ (B) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } x \text{ एक परिमेय संख्या है} \\ 0 & \text{यदि } x \text{ एक अपरिमेय संख्या है} \end{cases}$

(C) $f(x) = \sqrt{\frac{8}{1+\cos x} + \frac{8}{1-\cos x}}$

(D) $\left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[x - \frac{1}{2}\right] + 2[-x]$ (जहाँ $[.]$ महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है।)

कथन/कारण

40. कथन-1 यदि $y = f(x), [\alpha, \beta]$ में वर्धमान है तब इसका परिसर $[f(\alpha), f(\beta)]$ होता है।

कथन-2 सभी वर्धमान फलन जरूरी नहीं है कि सतत् हों

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है, कथन-2 कथन-1 की सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है, कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

41. कथन -1 $y = f(x)$ & $y = f^{-1}(x)$ सभी प्रतिच्छेदन बिन्दु सिर्फ $y = x$ स्थित है।

कथन -2 यदि बिन्दु $P(\alpha, \beta), y = f(x)$ पर स्थित है, तब बिन्दु $Q(\beta, \alpha), y = f^{-1}(x)$ पर स्थित है।

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है, कथन-2 कथन-1 की सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है, कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

EXERCISE # 2 (विषयात्मक प्रश्न)

1. निम्नलिखित फलनों का प्रान्त ज्ञात कीजिए—

(i) $f(x) = (x + 0.5)^{\log_{0.5+4x} \frac{x^2+2x-3}{4x^2-4x-3}}$

(ii) $f(x) = \frac{\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}}{\sqrt{6+35x-6x^2}}$

(iii) $f(x) = \left[\frac{x-1}{2} \right]^{-3 \sin^{-1} x^2} + \frac{(7x+1)!}{\sqrt{x+1}}$ जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है।

2. निम्नलिखित फलनों का प्रान्त और परिसर ज्ञात कीजिए—

(i) $f(x) = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{3-x}$

(ii) $f(x) = \cos^{-1} \sqrt{\log_{[x]} \frac{|x|}{x}}$ जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है।

(iii) $f(x) = \sqrt{\log_{1/2} \log_2 [x^2 + 4x + 5]}$ जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है।

(iv) $f(x) = \sin^{-1} \left[\log_2 \left(\frac{x^2}{2} \right) \right]$ जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है।

(v) $f(x) = \log_{[x-1]} \sin x$, जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है।

3. p के उन वास्तविक मानों का समुच्चय ज्ञात कीजिए जिनके लिए समीकरण $|2x+5| + |2x+5| = px+10$ के दो हल हैं।

4. समीकरण $[x][y] = x+y$ के पूर्णांक हल ज्ञात कीजिए। प्रदर्शित कीजिए कि सभी अपूर्णांक हल ठीक 2 रेखाओं पर स्थिति है ये रेखाएं ज्ञात कीजिए। जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है।

5. x वास्तविक मानों का समुच्चय ज्ञात कीजिए जिनके लिए फलन $f(x) = \frac{1}{[x-1] + [12-x] - 11}$ परिभाषित नहीं है, जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है।

6. फलन $f(a) = \sqrt{2a^2 - a}$ के प्रान्त में 'a' के मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए समीकरण $x^2 + (a+1)x + (a-1) = 0$ के मूल -2 और 1 के बीच स्थित हैं।

7. फलन $f(x) = \tan^{-1} \sqrt{[x] + [-x]} + \sqrt{2-|x|} + \frac{1}{x^2}$ का परिसर ज्ञात कीजिए।

8. माना कि $f: R \rightarrow \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ एक फलन है जो $f(x) = \cot^{-1}(x^2 + 4x) + \lambda^2 - \lambda$ से परिभाषित है, तो λ के मानों को समुच्चय ज्ञात कीजिए जिनके लिए $f(x)$ आच्छादक है।

9. माना कि $f(x) = \begin{cases} 4 & , x < -1 \\ -4x & , -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$ है यदि $f(x)$, R में एक सम फलन है, तो $(0, \infty)$ में $f(x)$ की परिभाषा ज्ञात कीजिए।

10. निम्नलिखित के कच्चे आरेख बनाइये।

(i) $y = \cos(\sin x)$

(ii) $x = 2y - y^2$

(iii) $|f(x)| = \log_2(-x)$.

(iv) $y = |\ln|x^2 - x||$

(v) $y = \min \{x - [x], -x - [-x]\}$, जहाँ $[.]$ महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है।

11. निम्नलिखित फलनों के आवर्तकाल ज्ञात कीजिए—

(i) $f(x) = \frac{(1 + \sin x)(1 + \sec x)}{(1 + \cos x)(1 + \operatorname{cosec} x)}$

(ii) $f(x) = \sin\left(2\pi x + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \sin\left(3\pi x + \frac{\pi}{4}\right) + 3 \sin(5\pi x)$

(iii) $f(x) = \left| \sin^3 \frac{x}{2} \right| + \left| \sin^5 \frac{x}{5} \right|$

12. x के लिए हल कीजिए—

जहाँ $[.]$ महत्तम पूर्णांक फलन को प्रदर्शित करता है और $\{.\}$ भिन्नात्मक भाग को प्रदर्शित करता है।

(i) $|[x] - 2x| = 4$

(ii) $[x - 1] + [1 - x] + x - \{x\} > 0$

13. निम्नलिखित फलनों के कच्चे आरेख बनाइये और विषम विस्तार ज्ञात कीजिए—

(i) $y = (\sin 2x)\sqrt{1 + \tan^2 x}$

(ii) $y = \sin x + |\sin x|$

(iii) $y = \ln x - \frac{(\ln x)^2}{|\ln x|}$

14. यदि x और y के सभी वास्तविक मानों के लिए $f(x) + f(y) = f(xy) = 2 + f(x) \cdot f(y)$ है एवं $f(x)$ एक बहुपद फलन है जिसके लिए $f(4) = 17$ है, तो $f(5)$ का मान ज्ञात कीजिए।

15. यदि $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x^2, & 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x}, & x > 4, \end{cases}$ हो, तो $f^{-1}(x)$ ज्ञात कीजिए।

16. निम्नलिखित फलनों के प्रान्त ज्ञात कीजिए—

(i) $f(x) = \frac{x^3 - 5x + 3}{x^2 - 1}$

(ii) $f(x) = 2^{\sin^{-1} x} + \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

17. निम्नलिखित फलनों के आलेख खींचिए—

(i) $f(x) = |x - 2| + |x - 3|$

(ii) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{if } 0 < x < 2 \\ 5 & \text{if } x \geq 2 \end{cases}$

18. माना कि $f(x) = \begin{cases} 1 + x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 3 - x, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$ है, तो $f \circ f$ ज्ञात कीजिए।

19. माना फलन $f(x) = 2 \cos^2 x + \sqrt{3} \sin 2x + 1, f: \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right] \rightarrow B$ द्वारा परिभाषित है। B ज्ञात कीजिए ताकि f^{-1} विद्यमान हो।
 $f^{-1}(x)$ भी ज्ञात कीजिए।

20. यदि $f(x)$ सम्बन्ध $f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) + d\left(\frac{1}{x}\right) \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ एवं $f(3) = -26$ को संतुष्ट करने वाला बहुपद फलन हो तो $f'(1)$ को ज्ञात कीजिए।

21. निम्नलिखित फलनों के प्रान्त ज्ञात कीजिए—

(i) $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

(ii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos x}}$

(iii) $f(x) = \log_{10}(1 - \log_{10}(x^2 - 5x + 16))$

22. निम्नलिखित फलनों के लेखाचित्र खींचिए (जहाँ $[x]$ एवं $\{x\}$, x के पूर्णांक एवं भिन्नात्मक भाग को प्रदर्शित करता है।)

(i) $y = \{\sin x\}$

(ii) $y = [\ln x]$

23. निम्नलिखित फलनों के परिसर ज्ञात कीजिए—

(i) $f(x) = 1 - |x - 2|$

(ii) $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - 8x - 4}$

(iii) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 4}$

(iv) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$

24. निम्नलिखित प्रतिबन्धों को संतुष्ट करने वाले $f(x)$ के आवर्तकाल ज्ञात कीजिए—

(i) $f(x+p) = 1 + \{1 - 3f(x) + 3f^2(x) - f^3(x)\}$ (ii) $f(x-1) + f(x+3) = f(x+1) + f(x+5)$

25. माना कि $f[-\sqrt{2}+1, \sqrt{2}+1] \rightarrow \left[\frac{-\sqrt{2}+1}{2}, \frac{\sqrt{2}+1}{2} \right]$ एक फलन इस प्रकार है कि $f(x) = \frac{1-x}{1+x^2}$

क्या f प्रतिलोमीय है, यदि हाँ, तो इसका प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

26. निम्नलिखित समीकरण को x के लिए हल कीजिए (जहाँ $[x]$ एवं $\{x\}$, x के पूर्णांक एवं भिन्नात्मक भाग को प्रदर्शित करता है)
 $2x + 3[x] - 4\{x\} = 4$

 सत्य/असत्य कथन

27. $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{a_1x^2 + b_1x + c_1}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$ $< b_1^2 - 4a_1c_1 > 0$) एक आच्छादक फलन है।

रिक्त स्थान की पूर्ति

28. यदि A, n विभिन्न अवयवों का समुच्चय हो, तो A से A में परिभाषित विभिन्न फलनों की संख्या----- है तथा इनमें से आच्छादक फलनों की संख्या----- है।

29. समुच्चय $\{1,2,3\}$ से समुच्चय $\{1,2,3,4,5\}$ में परिभाषित कुल चित्रण की संख्या जबकि $f(i) \leq f(j)$ जब कभी $i < j$ है।

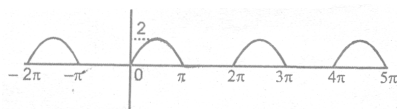
Answers

EXERCISE # 1

1. A 2. A 3. D 4. C 5. B 6. A 7. B
 8. A 9. B 10. D 11. D 12. D 13. C 14. B
 15. C 16. B 17. D 18. D 19. B 20. C 21. B
 22. D 23. C 24. D 25. C 26. A 27. C 28. A
 29. D 30. B 31. B 32. D 33. D 34. C
 35. BC 36. AC 37. AB 38. AD 39. ABCD 40. D
 41. D

EXERCISE # 2

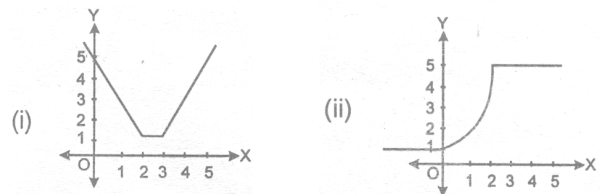
1. (i) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$
 (ii) $\left[-\frac{1}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 6\right]$
 (iii) $\left(\frac{n}{7}, n \in \mathbb{I}, -1 \leq n \leq 6\right)$
2. (i) D: [1, 3]; R: $[\sqrt{2}, \sqrt{10}]$
 (ii) D: $[2, \infty)$; R: $\{\pi/2\}$
 (iii) D: $(-2 - \sqrt{2}, -3) \cup [-1, -2 + \sqrt{2})$; R: $\{0\}$
 (iv) D: $(-\sqrt{8}, -1) \cup [1, \sqrt{8})$; R: $\left\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right\}$
- (v) D: $[3, \pi) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (2n\pi, 2n\pi + \pi)$; R: $(-\infty, 0]$
3. $p \in (-4, 4) - \{0\}$
4. Integral solution (0, 0); (2, 2). $x + y = 6$, $x + y =$
5. $(0, 1) \cup \{1, 2, \dots, 12\} \cup (12, 13)$
6. $(-1/2, 0) \cup [1/2, 1]$
7. $\left\{\frac{1}{4}, 2\right\}$ 8. $\left\{\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right\}$
9. $f(x) = \begin{cases} 4x & , 0 \leq x \leq 1 \\ +4 & , x > 1 \end{cases}$
11. (i) π (ii) 2 (iii) 10π
12. (i) $\left\{-4, -\frac{9}{2}, 4, \frac{7}{2}\right\}$ (ii) $x \in \{1\} \cup [2, \infty)$
13. (i) $y = 2 \sin x \cdot \cos | \sec x |$
 $y = 2 \sin x$ if $\cos x > 0$
 $-2 \sin x$ if $\cos x < 0$
 (ii) $y = 2 \sin x$ if $\sin x \geq 0$
 $= 2$ if $\sin x < 0$
 odd extⁿ $y = \sin - | \sin x |$



$$(iii) y = \begin{cases} 0 & \text{if } x > 1 \\ 2 \ln x & \text{if } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$15. f^{-1}(x) = \begin{cases} x & , x < 1 \\ \sqrt{x} & , 1 \leq x \leq 16 \\ \frac{x^2}{64} & , x > 16 \end{cases}$$

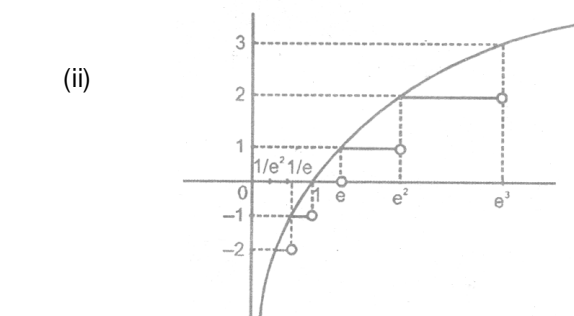
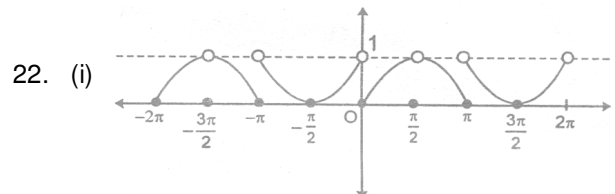
16. (i) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ (ii) ϕ



$$18. (f \circ f)(x) = \begin{cases} 2+x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & , 1 < x \leq 2 \\ 4-x & , 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

19. $B = [0, 4]; f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \left(\sin^{-1} \left(\frac{x-2}{2} \right) - \frac{\pi}{6} \right)$

20. -3 21. (i) ϕ (ii) $\mathbb{R} - \{2n\pi \mid n \in \mathbb{I}\}$ (iii) (2, 3)



23. (i) $(-\infty, 1]$ (ii) $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \cup \left[-\frac{1}{20}, \infty\right)$

(iii) $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$ (iv) $[4, \infty)$

24. (i) 2p (ii) 8

Download FREE Study Package from www.TekoClasses.com & Learn on Video
www.MathsBySuhag.com Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

25. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{-1\sqrt{4x-4x^2+1}}{2x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 26. $\left\{ \frac{3}{2} \right\}$ 27.False 28. $n^n, n!$ 29. 35

**for 39 Yrs. Que. of IIT-JEE
&
15 Yrs. Que. of AIEEE
we have distributed already a book**